UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
PROFMAT

RENERSON RENNEE MALATO DE SOUZA

PROGRESSÕES: PROBLEMAS E SOLUÇÕES

Abaetetuba - PA
2021

RENERSON RENNEE MALATO DE SOUZA

PROGRESSÕES: PROBLEMAS E SOLUÇÕES

Dissertação submetida ao corpo docente do programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT) do campus de Abaetetuba da Universidade Federal do Pará como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rômulo Correa Lima

Abaetetuba – PA
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S719p Souza, Renerson Rennee Malato de.
Progressões: problemas e soluções / Renerson Rennee Malato de Souza. — 2021.
72 f.

Orientador(a): Prof. Dr. Rômulo Correa Lima
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Abaetetuba, 2021.

1. Progressões . 2. Demonstrações. 3. Resoluções de problemas. I. Título.

CDD 515.24

RENERSON RENNEE MALATO DE SOUZA

PROGRESSÕES, SOLUÇÕES E EXERCÍCIOS.

Dissertação submetida ao corpo docente do programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT) do campus de Abaetetuba da Universidade Federal do Pará como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em:

Conceito:

BANCA EXAMINADORA

Rômulo Correa Lima

Prof. Dr. Rômulo Correa Lima

(PROFMAT/UFPA – Orientador)

Manuel de Jesus dos S. Costa.

Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa

(PROFMAT/UFPA – Membro Interno)

Antonio Maia de Jesus Chaves Neto

Prof. Dr. Antônio Maia de Jesus Chaves Neto

(UFPA – Membro Externo)

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, razão de toda minha vida; a minha família, em especial a minha amada esposa, minha mãe, meu pai e aos meus dois queridos filhos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à Deus pelo dom da vida, por iluminar meu caminho, possibilitar-me superar as dificuldades da vida e dar-me sabedoria para persistir e concluir este mestrado.

Aos meus dois filhos, Richard Rennee Malato de Souza e Raylla Rafaela Malato de Souza, que tanto me fizeram amadurecer e crescer, motivado pela necessidade de ser um bom exemplo de vida a eles.

À minha esposa Ozana Farias Martins, pelo amor, parceria, compreensão e incentivo durante todos os momentos do curso, meu sincero muito obrigado;

Á minha querida Mãe, Maria Rosangela Malato de Souza por toda educação me dado e também pelo exemplo de pessoa.

Aos meus irmãos por todo apoio e força durante o curso.

Ao meu Pai, Manoel das Graças de Souza, que não se encontra mais entre nós, mas que sempre foi minha inspiração.

Ao Prof. Dr. Rômulo Corre Lima, por sua excelente orientação, dedicada e paciência.

Aos professores do curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT da UFPA Campus de Abaetetuba – PA, pela amizade, paciência e pelo conhecimento compartilhado, em especial aos professores Dr. Renato Fabricio Costa Lobato e ao Dr. Rômulo Correa Lima, pela atenção e competência demonstrada em relação a coordenação do curso.

À sociedade Brasileira de Matemática – SBM e aos professores do IMPA pelo oferecimento deste curso em Rede Nacional e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES.

Aos meus colegas da turma de mestrado de 2019 da UFPA Campus Abaetetuba, pelo convívio e por toda troca de experiências que contribuíram para minha formação docente, por todos os encontros em nossa preparação ao ENQ, onde todos compartilharam e contribuíram de maneira fundamental para que todos conseguissem suas aprovações.

Aos professores da banca, por terem dedicado parte do seu tempo para examinarem meu trabalho e trazerem sugestões.

A todos os que contribuíram com minha formação, os quais acima enumerei, e aos colaboradores que porventura tenha deixado de mencionar, externo aqui a minha eterna gratidão.

RESUMO

Este trabalho trata-se de um estudo sobre progressões, isto é, as progressões aritméticas (PA), progressões geométricas (PG), também as harmônicas (PH), aritmético-geométrica (PAG) e geométrico-aritmética (PGA). Para introduzir as progressões foram abordados temas como indução finita e recorrência de primeira ordem. Esta pesquisa foi desenvolvida através de processo de construções de fórmulas matemáticas, demonstrações de teoremas e resoluções de exercícios. O objetivo foi aperfeiçoar a compreensão e o entendimento das demonstrações envolvendo progressões, além de instruir e elencar métodos e exemplos de como promover o estudo das progressões no nível mais aprofundado. De acordo com o estudo bibliográfico desenvolvido, é possível mostrar que os processos de demonstrações envolvendo progressões têm importante relação com a construção do desenvolvimento cognitivo e lógico da matemática. O método utilizado na pesquisa teve a combinação de ser exploratório, explicativo e descritivo. Por fim, a pesquisa constatou que os estudos das progressões por meio de resoluções de problemas contribuem para o desenvolvimento do raciocínio lógico e interpretativo tanto do aluno como de professores em seu processo ensino-aprendizagem.

Palavras-chave: Progressões. Resoluções de Problemas. Demonstrações.

ABSTRACT

This work is a study on progressions, that is, arithmetic (PA), geometric (PG), harmonic (PH), arithmetic-geometric (PAG) and geometric-arithmetic (PGA) progressions. To introduce the progressions, topics such as finite induction and first order recurrence were addressed. This research was developed through the process of construction of mathematical formulas, theorem demonstrations and exercise resolutions. The objective was to improve the understanding and understanding of demonstrations involving progressions, in addition to instructing and listing methods and examples on how to promote the study of progressions at the deepest level. According to the bibliographical study developed, it is possible to show that the demonstration processes involving progressions have an important relationship with the construction of the cognitive and logical development of mathematics. The method used in the research had the combination of being exploratory, explanatory and descriptive. Finally, the research found that the studies of progressions through problem solving contribute to the development of logical and interpretive reasoning for both students and teachers in their teaching-learning process.

Keywords: Progressions. Troubleshooting. Demonstrations.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A presente investigação se refere ao estudo das progressões com ênfase nas resoluções de problemas. Considera-se que o estudo das progressões na maioria das escolas brasileiras, limitasse a analisar somente as progressões aritméticas e geométricas, porém deixam de mencionar que há outros tipos de progressões como a harmônica, aritmético-geométrica e geométrico-aritmética.

Além disso, demonstrar um teorema ou resolver um problema típico de demonstração nem sempre são abordados quando se trata de progressões. Devido essa necessidade surgiu o interesse de realizar um estudo das cinco progressões em resoluções de problemas. Essas resoluções serão como uma forma de preparar alunos do Ensino Médio e professores para exames que abordam problemas demonstrativos. Com isso eles terão um material mais abrangente que poderão progredir ao estudo das progressões.

Como no ensino médio são ministradas somente progressão aritmética (PA) e progressão geométrica (PG), então este material servirá como fonte de estudos para outros tipos de progressões, a maioria delas desconhecidas para alunos e professores. Outro fator que justifica a importância desta pesquisa é a apresentação de inúmeros problemas típicos demonstrativos dessas progressões que são constantemente utilizados em olimpíadas nacional e internacional de matemática, vestibulares entre outros que cobram resoluções de problemas.

O estudo dessas progressões tem-se como objetivo geral aperfeiçoar a compreensão e o entendimento das resoluções de exercícios e como específico instruir e elencar métodos e exemplos de como promover o estudo das progressões, isto é, ampliar as possibilidades de metodologias para resolver problemas que envolvam estas progressões.

No primeiro capítulo é realizada uma revisão dos conteúdos que auxiliarão aos estudos das progressões, isto é, a indução matemática finita e a recorrência de primeira ordem. Esses dois assuntos contribuirão de forma importante na compressão das progressões, pois para demonstrar um teorema ou resolver um exercício que necessita a demonstração tanto o princípio da indução finita como a recorrência de primeira ordem poderão ser usado.

No capítulo dois são apresentadas as progressões aritméticas, isto é, as teorias que são abordadas no ensino médio como: sequência, definição, classificação, termo geral e outros detalhes que compõem as PAs. Finaliza-se o estudo das progressões aritméticas com problemas e resoluções.

No capitulo três aborda-se os estudos das progressões geométricas, o qual se inicia com a definição, procede com a classificação e estende-se até aos casos excepcionais de progressões geométricas. Por fim, encerra-se o capítulo com a exposição de várias resoluções de exemplos.

No capítulo quatro apresentam-se sequências especiais, ou seja, as progressões harmônicas, aritmético-geométricas e geométrico-aritméticas, as quais não são abordadas no ensino médio, mas que merecem uma atenção significativa. Neste capítulo é realizado também resoluções de problemas.

1 REVISÃO DO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA E RECORRÊNCIA DE PRIMEIRA ORDEM

1.1 Princípio da indução finita

Na matemática, quando há situações que necessitam as demonstrações no conjunto dos números naturais uma das ferramentas que pode utilizada é o princípio da indução finita. Esse princípio é entendido como um conjunto de proposições utilizado para demonstrar que uma propriedade é válida para certo número n_0 natural e todos os seus sucessores.

Definição 1.1 Seja P(n) uma propriedade relativa ao número natural n e seja n_0 um número natural. Suponha que:

i) $P(n_0)$ é verdadeira, ou seja, a propriedade é válida para $n \geq n_0$;

ii) Para todo $n \geq n_0$, a validez de P(n) implica a validez de P(n + 1).

Então P(n) é válida para quaisquer $n \geq n_0$ com $n \in \mathbb{N}$ (LIMA, 2006; MORGADO e CARVALHO, 2014; IEZZI e MRUKAMI, 2013).

Observação: "n_0" significa o menor valor assumido no conjunto dos números naturais.

Exemplo 1.1 Mostrar que $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$ $(n \in \mathbb{N})$

Solução.

1º) Verifica-se que P(1) é verdadeira, isto é:

para n = 1, tem-se:

$$1 = 1^2$$

2º) Supondo que P(n) seja verdadeira, para algum com $n \in \mathbb{N}$. Isto significa que, para este valor de n, tem-se:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2 \text{ (hipótese da indução).}$$

Soma-se o próximo termo do somatório, (2n + 1) a ambos os membros da igualdade, obtém-se:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1)$$

Tudo o que se tem a fazer agora é manipular a expressão no segundo membro, de modo a torná-lo igual a $(n + 1)^2$.

De fato, tem-se:

$$n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

Portanto,

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2,$$

o que mostra que P(n + 1) é verdadeira.

Dessa forma, P(n) é válida para quaisquer $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.2 Mostrar que a soma dos n primeiros números naturais é dada por $\frac{n(n+1)}{2}$.

Solução.

i) Para n = 1 a propriedade é válida, uma vez que

$$\frac{1(1+1)}{2} = 1;$$

ii) Considera-se a propriedade válida para n:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Então,

$$1 + 2 + 3 + ... + n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+1)}{2}$$

Assim, $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.3 Demostrar que $2n \geq n + 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Solução.

1º) Verifica-se que P(1) é verdadeira, isto é:

para n = 1, tem-se:

$$2.1 \geq 1 + 1$$

2º) Supondo que P(n), com $n \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$2n \geq n + 1 \text{ (hipótese da Indução).}$$

Será provado que é válida P(n + 1), isto é, $2(n + 1) \geq (n + 1) + 1$.

Soma-se 2 em ambos lados da hipótese, tem-se:

$$2n + 2 \geq n + 3 \Leftrightarrow 2(n + 1) \geq n + 3.$$

Como $2(n + 1) \geq n + 3$ (hipótese de indução) e $n + 3 \geq (n + 1) + 1$, então:

$$2(n + 1) \geq (n + 1) + 1.$$

Portanto, P(n + 1) é válida para $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

1.2 Recorrências

Uma sequência é dita recorrente, ou simplesmente “recorrência”, quando a partir de um certo termo, todos os termos são dados em função do(s) termo(s) anterior(es) (SILVA, 2015).

São exemplos de recorrências:

a) progressões aritméticas: $a_n = a_{n-1} + r$;

b) progressões geométricas: $a_n = a_{n-1}q$;

c) fatorial: $a_n = na_{n-1}$;

d) potências com expoente natural: $a_n = aa^n$

1.2.1 Classificação das recorrências

As recorrências podem ser classificadas, quanto (SILVA, 2015; MORGADO e CARVALHO, 2014):

I) **Linearidade**: a recorrência é linear quando o expoente dos termos anteriores ao termo geral são todos iguais a 1 e também for expressa por uma função do primeiro grau, caso contrário é dita não linear.

São exemplos de recorrência quanto a linearidade:

a) $x_{n+1} = 2x_n - n^2$ (Recorrência linear)

b) $x_{n+1} = x_n^2$ (Recorrência não linear)

II) **Homogeneidade**: uma recorrência é dita homogênea quando depende apenas dos termos anteriores. Se, além dos termos anteriores, cada elemento da sequência está também em função de um termo independente da sequência, a recorrência é dita não-homogênea.

São exemplos de recorrência quanto à homogeneidade:

a) $x_{n+1} = x_n + 2$ (Recorrência não-homogênea)

b) $x_{n+1} = q\, x_n$ (Recorrência homogênea)

III) **Ordem**: uma recorrência é dita de primeira ordem quando cada termo é expresso em função do antecessor imediato. Já a recorrência de segunda ordem, cada termo é expresso em função dos dois antecessores imediatos.

São exemplos de recorrência quanto a ordem:

a) $x_{n+1} = x_n + 2$ (Recorrência de primeira ordem)

b) $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ (Recorrência de segunda ordem)

1.2.2 Resolução de recorrências linear homogênea de primeira ordem

Não há grandes dificuldades na resolução de uma recorrência linear homogênea de primeira ordem conforme mostra o exemplo a seguir (LIMA, 2006; MORGADO e CARVALHO, 2014; SILVA, 2015).

Exemplo 1.4 Resolva a recorrência $x_{n+1} = 3x_n$, sabendo que $x_1 = 2$

Solução.

Escreva-se a relação de recorrência para diversos valores de n, começando com n = 1.

$$x_2 = 3x_1$$
$$x_3 = 3x_2$$
$$x_4 = 3x_3$$
$$\vdots$$
$$x_n = 3x_{n-1}.$$

Agora, multiplica-se todas essas igualdades, computa-se a quantidade de vezes que o número 3 foi mencionado, ou seja, n – 1 vezes.

Assim, $x_n = x_1 3^{n-1}$. Como $x_1 = 2$, então a lei de formação é:

$$x_n = 2.3^{n-1}$$

1.2.3 Resolução de recorrências linear não-homogênea de primeira ordem

A resolução de uma recorrência linear de primeira ordem não-homogênea é feita através do teorema a seguir (MORGADO e CARVALHO, 2014).

Teorema 1. Se a_n é uma solução não-nula da recorrência $x_{n+1} = g(n)\, x_n$, então a substituição $x_n = a_n y_n$ transforma a recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$ em:

$$y_{n+1} = y_n + h(n)[g(n)a_n]^{-1} \qquad (1)$$

Demonstração. Seja a_n a solução não-nula da equação homogênea. A substituição $x_n = a_n y_n$ transforma

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n) \text{ em } a_{n+1}y_{n+1} = g(n)\, a_n y_n + h(n).$$

Mas,

$$a_{n+1} = g(n)\, a_n,$$

isto é, a_n é solução de $x_{n+1} = g(n)x_n$.

Portanto, a equação se transforma em:

$$g(n)\, a_n y_{n+1} = g(n)\, a_n y_n + h(n),$$

ou seja, transforma

$$x_{n+1} = g(n)\, x_n + h(n) \text{ em } y_{n+1} = y_n + h(n)[g(n)a_n]^{-1}$$

Exemplo 1.5 Resolva a recorrência $x_{n+1} = 3x_n + 3^n$, para todo $n \geq 0$, onde $x_1 = 2$.

Solução.

Primeiro encontra-se uma solução particular não-nula de $x_{n+1} = 3x_n$:

$$x_2 = 3x_1$$
$$x_3 = 3x_2$$
$$x_4 = 3x_3$$
$$\vdots$$
$$x_n = 3x_{n-1}.$$

Daí, multiplicando, obtém-se $x_n = 3^{n-1}.\ x_1$.

Agora, faz-se a substituição $x_n = 3^{n-1}y_n$ em $x_{n+1} = 3x_n + 3^n$:

$$3^n y_{n+1} = 3.3^{n-1} y_n + 3^n$$
$$3^n y_{n+1} = 3^n y_n + 3^n \text{ (dividem-se ambos os membros por } 3^n\text{)}$$
$$y_{n+1} = y_n + 1.$$

Aplicando novamente o processo de resolução de recorrência, mas em $y_{n+1} = y_n + 1$, tem-se:

$$y_2 = y_1 + 1$$
$$y_3 = y_2 + 1$$
$$y_4 = y_3 + 1$$
$$\vdots$$
$$y_n = y_{n-1} + 1$$

Somam-se as equações, obtém-se $y_n = y_1 + (n - 1)$.

Como $x_n = 3^{n-1}y_n$, e $x_1 = 2$, têm-se: $y_1 = 2$ e $y_n = n + 1$.

Logo, a solução geral da recorrência $x_{n+1} = 3x_n + 3^n$ é $x_n = (n - 1)3^{n-1}$

2 PROGRESSÃO ARITMÉTICA

2.1 Sequências

As sequências podem ser definidas como uma função. Seja $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ números reais, a função $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3$, ..., $f(n) = a_n$, ... é representado por $(a_1, a_2, a_3 ..., a_n, ...)$ ou (a_n).

Note que o índice n indica a posição do elemento na sequência. Dessa forma, o primeiro termo é indicado por a_1, o segundo é indicado por a_2 e assim por diante. Observe que a notação usual para uma sequência infinita é $(a_1, a_2, a_3 ..., a_{n-1}, a_n, ...)$. A sequência finita é designada pela notação $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$.

Sequências podem ser definidas por meios de fórmulas, isto é, por uma lei de formação ou um termo geral. A lei de formação permite obter cada termo conhecendo-se a posição que ele ocupa na sequência correspondência. Porém, nem toda sequência apresenta fórmula do termo geral ou lei de recorrência (YOUSSEF et al, 2009).

Exemplo 2.1 A sequência (a_n) dos números primos (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,...) não possui uma lei ou termo geral que determina encontrar a posição de certo elemento, mas os primeiros termos são notórios perceber, isto é, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, $a_5 = 11$, ...

Exemplo 2.2 Para a sequência $(b_n) = (-1, 1, 3, 5, 7, ...)$ existe um termo geral, pois

$$
\begin{gathered}
b_1 = 2.1 - 3 \\
b_2 = 2.2 - 3 \\
b_3 = 2.3 - 3 \\
\vdots \\
b_n = 2n - 3,
\end{gathered}
$$

Portanto, o termo geral da sequência (b_n) é $2n - 3$.

Ainda com as sequências, há a determinação de uma sequência por recorrência, isto é, quando se conhece o primeiro termo de uma sequência e uma lei que permite calcular cada termo (a_n) a partir de seus anteriores imediatos, diz-se que se explicita, a sequência por recorrência.

Por exemplo, explicitando a sequência,

$$
\begin{cases}
a_1 = 1 \\
a_{n+1} = 2a_n + 1, \text{para } n \geq 1
\end{cases}
$$

tem-se:

$$n = 1 \Rightarrow a_2 = 2a_1 + 1 = 2.1 + 1 = 3$$
$$n = 2 \Rightarrow a_3 = 2a_2 + 1 = 2.3 + 1 = 7$$
$$n = 3 \Rightarrow a_4 = 2a_3 + 1 = 2.7 + 1 = 15$$
$$n = 4 \Rightarrow a_5 = 2a_4 + 1 = 2.15 + 1 = 31$$

Sendo assim, a sequência é dada por (1, 3, 7, 15, 31, ...).

Uma sequência bastante conhecida na matemática é a sequência de Fibonacci cujos termos são 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... e na qual cada termo, a partir do terceiro, é óbito somando-se os dois anteriores. Essa sequência é definida por uma recorrência de segunda ordem $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, $(n \geq 0)$, com $F_0 = F_1 = 1$. (YOUSSEF et al, 2009; MORGADO e CARVALHO, 2014).

2.2 Definição de uma progressão aritmética

Definição 2.1 Progressão aritmética é uma sequência de números (a_1, a_2, a_3, ... a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, ...) onde cada termo, a partir do segundo, é a soma do termo anterior mais uma constante. Essa constante é chamada de razão e será representada por r (LIMA, 2013; MORGADO et al, 2015).

Se a sequência (a_1, a_2, a_3, ... a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, ...) é uma PA, então:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_{n-1} - a_{n-2} = a_n - a_{n-1} ... = r$$

Essa sequência pode ser representada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$a_n = a_{n-1} + r \qquad (2)$$

onde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, a_n e a_{n-1} são, respectivamente, os termos de ordem n e n – 1.

Uma progressão aritmética finita (n termos) é uma sequência finita (a_1, a_2, a_3, ... a_n) tal que $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_n - a_{n-1} = r$ (LIMA, 2013).

Exemplo 2.3 A sequência (3, 7, 11, 15) é uma PA finita de razão 4, pois

$$7 - 3 = 11 - 7 = 15 - 7 = 4 = r$$

Exemplo 2.4 A sequência (11, 8, 5, 2, ...) é uma PA infinita de razão –3 , pois

$$8 - 11 = 5 - 8 = 2 - 5 = -1 = ... = a_n - a_{n-1} = ... = -3 = r$$

2.3 Classificação de uma progressão aritmética

As progressões aritméticas são classificadas de acordo com o sinal da razão:

a) Crescentes são PAs em que cada termo é maior que o anterior. Isso ocorre se, e somente se $r > 0$.

b) Decrescentes são PAs em que cada termo é menor que o anterior. Isso ocorre se, e somente se $r < 0$.
c) Constantes são PAs em que cada termo é igual ao anterior. Isso ocorre se, e somente se $r = 0$.

Exemplo 2.5 As progressões aritméticas (π, $\pi + 2$, $\pi + 4$, $\pi + 6$ ...), ($2 + \sqrt{3}$, 2, $2 - \sqrt{3}$, $2 - \sqrt{3}$, ...) e (π, π, π, π, ...) são respectivamente, crescente, decrescente e constantes.

2.4 Termo geral de uma progressão aritmética

Toda progressão aritmética possuem um termo geral, ou seja, uma lei que determina obter a posição de certo termo. A partir da sequência e da definição pode-se obter um termo principal da progressão aritmética.

Teorema 2. Se (a_n) é uma progressão aritmética de razão r, então $a_n = a_1 + (n - 1)r$; para todo n inteiro e positivo.
Demonstração. Por indução matemática finita em n, tem-se:
1º) É verificado que P(1) é verdadeira:
para n = 1, tem-se:

$$a_1 = a_1 + (1 - 1)r.$$

2º) Suponha que P(n), com $n \in \mathbb{N}$, seja verdadeira, ou seja:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \tag{3}$$

e prova-se que P(n + 1) é verdadeira.

Da definição 2.1, tem-se:

$$a_{n+1} - a_n = r \Rightarrow a_{n+1} = a_n + r \tag{4}$$

Substituindo (3) em (4), tem-se:

$$a_{n+1} = a_1 + (n - 1)r + r = a_1 + nr - r + r = a_1 + nr.$$

Portanto, P(n + 1) é válida para $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Existem outras formas de se chegar ao teorema 2.

Numa progressão aritmética $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, ...)$, para avançar um termo, basta somar a razão; para avançar dois termos, bastar somar duas vezes a razão, e assim por diante (MORGADO e CARVALHO, 2014).

Sendo assim, tem-se:

$a_{10} = a_4 + 6r$ (ao passar de a_4 para o a_{10}, avançam-se 6 termos);

$a_{12} = a_7 + 5r$ (ao passar de a_7 para o a_{12}, avançam-se 5 termos);

$a_4 = a_{17} - 13r$ (retrocederam 13 termos ao passar de a_{17} para o a_4);

De forma geral,

$a_n = a_1 + (n - 1)r$ (ao passar de a_1 para a_n, avançam-se $n - 1$ termos);

Outra maneira é utilizando recorrência de primeira ordem, isto é:

Seja $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ uma progressão aritmética de razão r, então:

$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = a_2 + r$$
$$a_4 = a_3 + r$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} + r$$

Agora, somam-se todas essas equações, conta-se a quantidade de vezes que o número r foi contado, ou seja, $n - 1$ vezes.

Assim, $a_n = a_1 + (n - 1)r$ é a lei de formação das progressões aritméticas.

Exemplo 2.6 Seja (a_n) uma progressão aritmética, o qual o sétimo termo vale 11 e o décimo nono termo vale 29. Quanto vale o décimo terceiro termo dessa progressão?

Solução.

Note, pelo termo geral, que:

$$a_{19} = a_7 + 12r,$$

pois ao passar do sétimo termo para o décimo nono, avança-se 12 termos.

Assim,

$$29 = 11 + 12r \text{ e } r = \frac{3}{2}.$$

De forma Análoga, tem-se:

$$a_{13} = a_7 + 6r = 11 + 6.\frac{3}{2} = 20.$$

Portanto, o décimo terceiro termo vale 20.

2.5 Propriedades de uma progressão aritmética

Propriedade (P1). Em toda PA finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

Demonstração. Seja a PA finita (a_1, a_2, a_3, ..., a_k, a_{k+1}, ..., a_{n-k}, ..., a_n) de razão r.

Os termos a_{k+1} e a_{n-k} são equidistantes dos extremos, pois antes de a_{k+1} existem k termos e depois de a_{n-k} existem, também, k termos.

Se demonstrar que $a_{k+1} + a_{n-k} = a_1 + a_n$, então (P1) é válida.

De fato:

$$\begin{aligned} a_{k+1} + a_{n-k} &= a_1 + (k + 1 - 1)r + a_1 + (n - k - 1)r \\ &= a_1 + kr + a_1 + nr - kr - r \\ &= a_1 + a_1 + kr - kr + nr - r \\ &= a_1 + a_1 + nr - r \\ &= a_1 + a_n \end{aligned}$$

Propriedade (P2). Uma sequência de três termos é PA se, e semente se, o termo médio é igual à média aritmética entre outros dois, isto é:

$$(a, b, c) \text{ é PA} \Leftrightarrow b = \frac{a+c}{2}$$

Demonstração. Tem-se:

$$(a, b, c) \text{ é PA} \Leftrightarrow b - a = c - b \Leftrightarrow b = \frac{a+c}{2} \tag{5}$$

Logo, (a, b, c) é PA $\Leftrightarrow b = \frac{a+c}{2}$

Propriedade (P3). Em uma PA com número ímpar de termos, o termo médio é igual a média aritmética entre os extremos.

Demonstração. Seja a_k o termo médio de uma PA com número ímpar de termos:

$$(a_1, a_2, a_3, ..., a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, ..., a_n)$$

Tem-se que a sequência (a_{k-1}, a_k, a_{k+1}) também é uma PA. Logo, por (P2), tem-se:

$$a_k = \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2} \tag{6}$$

Mas os termos a_{k-1} e a_{k+1} são equidistantes dos extremos e, portanto, por (P1):

$$a_{k-1} + a_{k+1} = a_1 + a_n \quad (7)$$

Por (6) e (7), conclui-se que:

$$a_k = \frac{a_1+a_n}{2} \quad (8)$$

Exemplo 2.6 Seja (a_n) uma progressão aritmética de termos 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13. Mostre a validade das propriedades das progressões aritméticas (P1), (P2) e (P3).

Solução.

Por (P1), tem-se:

$$1 + 13 = 3 + 11 = 5 + 9 = 14.$$

Por (P2), tem-se:

$$3 = \frac{1+5}{2}, 5 = \frac{3+7}{2}, 7 = \frac{5+9}{2}, 9 = \frac{7+11}{2}, 11 = \frac{9+13}{2}$$

Por (P3), tem-se:

$$7 = \frac{1+13}{2}$$

2.6 Interpolação aritmética

Interpolação aritmética é um dispositivo prático que auxilia na resolução de problemas matemáticos, pois consiste em determinar quais números, em uma certa quantidade n fornecida, devem ser interpolados entre dois números dados de modo que estes n + 2 números forme uma progressão aritmética.

Inserindo k meios aritméticos entre os extremos (a_1 e a_n) de uma PA para tanto, essa progressão terá k + 2 termos. Para determinar os meios dessa PA é necessário calcular a razão que pode ser feito da seguinte forma:

Pelo termo geral da PA e com k + 2 termos, a razão vale:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow (k+2-1)r = a_n - a_1 \Rightarrow r = \frac{a_n - a_1}{k+1}. \quad (9)$$

Portanto, tem-se a expressão acima que nos permite calcular a razão de uma PA, inserindo k meios aritméticos entre os extremos.

Exemplo 2.7 Interpolar 4 meios aritméticos entre 0,03 e 0,3.

Solução.

Interpolar 4 meios aritméticos entre 0,03 e 0,3, nessa ordem, significa determinar a PA de primeiro termo 0,03 e último 0,3, havendo entre eles quatro outros termos.

Por (9) e, também, com k = 4, tem-se:

$$r = \frac{a_n - a_1}{k+1} \Leftrightarrow r = \frac{0{,}3 - 0{,}03}{4+1} = 0{,}054.$$

Assim,

$$a_1 = 0{,}03$$
$$a_2 = 0{,}03 + 0{,}054 = 0{,}084$$
$$a_3 = 0{,}084 + 0{,}054 = 0{,}138$$
$$a_4 = 0{,}138 + 0{,}054 = 0{,}192$$
$$a_5 = 0{,}192 + 0{,}054 = 0{,}246$$
$$a_6 = 0{,}246 + 0{,}054 = 0{,}3.$$

Portanto, os 4 termos interpolados a PA são 0,084; 0,138; 0,192 e 0,246.

2.7 Soma dos termos de uma progressão aritmética finita

Um episódio notório da história da Matemática está associado a soma dos termos da progressão aritmética finita (a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n), o qual mostra um dos grandes matemáticos da história:

> "Um dia, para manter a classe ocupada o professor mandou que os alunos somassem todos os números de um a cem, com instruções a cada um para colocar sua lousa sobre uma mesa logo que completasse a tarefa. Quase imediatamente Carl colocou sua lousa sobre a mesa, dizendo, "Aí está"; o professor olhou para ele com pouco caso enquanto os outros trabalhavam diligentemente. Quando o mestre finalmente olhou os resultados, a lousa de Gauss era a única a exibir a resposta correta, 5050, sem nenhum cálculo. O menino de dez anos evidentemente calculara de cabeça a soma da progressão aritmética 1+2+3+...+99+100, presumidamente por meio da fórmula n(n + 1)/2". (BOYER, 1974)

Aquele menino viria a ser um dos maiores matemáticos de todos os tempos: Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

O cálculo efetuado por Gauss foi simples e elegante; ele percebeu que:

A soma do primeiro número com o último é 1 + 100 = 101

A soma do segundo número com o penúltimo é 2 + 99 = 101

A soma do terceiro número com o antepenúltimo é 3 + 98 = 101,

e assim por diante, ou seja, a soma de dois termos equidistante dos extremos é igual à soma dos extremos, que é 101.

Como no total são 50 somas iguais a 101, Gauss concluiu que:

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + 97 + 98 + 99 + 100 = 50.101 = 5050$$

Esse raciocínio pode ser generalizado para cálculo da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética qualquer.

Observe o processo da fórmula da soma dos termos de uma Progressão Aritmética:

Escreve-se a soma S_n duas vezes, do seguinte modo:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \tag{10}$$

e

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 \tag{11}$$

Somam-se, membro a membro, (10) e (11), tem-se:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Como que em cada expressão entre parênteses tem-se a soma dos extremos ou a soma de dois termos equidistantes dos extremos, então podem-se escrever, pela propriedade (P1):

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)}_{\text{n parcelas iguais a } (a_1 + a_n)}$$

O que implica em:

$$2S_n = (a_1 + a_n)n$$

Logo,

$$S_n = (a_1 + a_n)\frac{n}{2} \tag{12}$$

Teorema 3. A soma S_n dos n primeiros termos de uma progressão aritmética de termos (a_1, a_2, a_3, ..., a_n) é tal que

$$S_n = (a_1 + a_n).\frac{n}{2}$$

Demonstração. Pelo princípio da indução finita em n, tem-se:

1º) É verificado que P(1) é verdadeira:

Para n = 1, tem-se:

$$S_1 = (a_1 + a_1).\frac{1}{2} \Leftrightarrow S_1 = \frac{2a_1}{2} \Leftrightarrow S_1 = a_1$$

2º) Suponha que P(n), com $n \in \mathbb{N}$, seja verdadeira, ou seja:

$$S_n = (a_1 + a_n).\frac{n}{2} \text{ (I).}$$

E prova-se que P(n + 1) é verdadeira.

Como $S_{n+1} - S_n = (a_1 + a_{n+1}).\frac{(n+1)}{2} - (a_1 + a_n).\frac{n}{2} = a_{n+1} = a_1 + nr$, então:

$$S_{n+1} = S_n + a_1 + nr \text{ (II).}$$

Substituindo (I) em (II), tem-se:

$$S_{n+1} = (a_1 + a_n).\frac{n}{2} + a_1 + nr = \frac{na_1 + n(a_1 + nr - r) + 2a_1 + 2nr}{2} = \frac{na_1 + na_1 + n^2r - nr + 2a_1 + 2nr}{2} =$$

$$= \frac{2na_1 + 2a_1 + n^2r + nr}{2} = \frac{2a_1(n+1) + nr(n+1)}{2} = \frac{(2a_1 + nr)(n+1)}{2} = \frac{(a_1 + a_1 + nr)(n+1)}{2} = \frac{(a_1 + a_{n+1})(n+1)}{2}.$$

Portanto, P(n + 1) é válida para $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.8 Seja (a_n) uma progressão aritmética infinita de termos (6, 10, 14, 18, ...). Calcular a soma dos 20 primeiros termos de (a_n).

Solução.

Da progressão aritmética, tem-se:

$$a_1 = 6 \text{ e } a_{20} = a_1 + 19r = 82.$$

Pela fórmula,

$$S_n = (a_1 + a_n).\frac{n}{2}$$

tem-se:

$$S_{20} = (6 + 82).\frac{20}{2} \Leftrightarrow S_{20} = 880.$$

Portanto, a soma dos vinte primeiros termos da PA vale 880.

2.8 Casos excepcionais de uma progressão aritmética

Com o intuito de agilizar resoluções de certos problemas, convém representar uma PA de maneiras especiais. Veja a seguir algumas dessas representações:

1º) A sequência (x – r, x, x + r) é uma PA de três termos e razão r, para quaisquer valores de x e r. Essa representação é mais adequada quando se pretende determinar uma PA de três termos, conhecendo-se a soma deles.

Exemplo 2.9 Em um triângulo retângulo os lados estão em progressão aritmética. Sabe-se ainda que o perímetro desse triângulo vale 30 cm. Mostre que apenas um lado desse triângulo possui um número inteiro.

Solução. Observe que a soma dos lados do triângulo é 30 cm e como os lados estão em PA, então, representa-se de forma genérica por:

$$(x - r, x, x + r)$$

Logo,

$$x - r + x + x + r = 30 \Rightarrow x = 10 \text{ cm}$$

Agora, substitua-se x = 10 cm, a PA, então:

$$(10 - r, 10, 10 + r)$$

Como o triângulo é retângulo e a hipotenusa é o maior lado, então aplica-se o Teorema de Pitágoras para determinar o valor razão, isto é:

$$(10 + r)^2 = (10 - r)^2 + (10)^2$$

$$100 + 20r + r^2 = 100 - 20r + r^2 + 100$$

$$40r = 100$$

$$r = 2{,}5$$

Assim, as medidas dos lados do triângulo são 7,5 cm, 10 cm e 12,5 cm.

2º) A sequência $(x - 3r, x - r, x + r, x + 3r)$ é uma PA de quatro termos e razão 2r, para quaisquer valores de x e r.

Exemplo 2.10 Em uma PA crescente de quatro termos, a soma de todos os termos é 16 e o produto do segundo pelo terceiro termo é 12. Mostre que a razão dessa PA é um quadrado perfeito.

Solução. Como se conhece a soma dos termos, então a representação mais adequada da PA genérica é $(x - 3r, x - r, x + r, x + 3r)$. Assim, tem-se:

$$\begin{cases} x - 3r + x - r + x + r + x + 3r = 16 \\ (x - r)(x + r) = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \text{ (I)} \\ (x - r)(x + r) = 12 \text{ (II)} \end{cases}$$

Substituam-se (I) em (II), obtém-se:

$$(4 - r)(4 + r) = 12 \Rightarrow 16 - r^2 = 12$$

Então,

$$r^2 = 4 \Rightarrow r = \pm 2$$

Como se quer uma PA crescente, então a razão é positiva, o que ocorre para r = 2. Mas, a razão é 2r, logo

$$a_1 = x - 3r = 4 - 3.2 = -2$$

$$a_2 = x + r = 4 - 2 = 2$$

$$a_3 = x - r = 4 + 2 = 6$$

$$a_4 = x - 3r = 4 + 3.2 = 10$$

Portanto, a razão da PA é quadrado perfeito, isto é, $r = 2 - (-2) = 6 - 2 = 10 - 6 = 4$.

3º) A sequência (x – 2r, x – r, x, x + r, x + 2r) é uma PA de cinco termos e razão r, para quaisquer valores de x e r.

Exemplo 2.11 Determinar 5 números em uma PA crescente de tal modo que a sua soma seja 25 e a soma dos seus cubos seja 3025.

Solução: Denota-se os cinco termos em PA por x − 2r, x − r, x, x + r e x + 2r, de sorte que r seja a razão. Dessa forma, tem-se:

$$(x - 2r) + (x - r) + x + (x + r) + (x + 2r) = 25 \Rightarrow 5x = 25 \Rightarrow x = 5$$

Por outro lado, tem-se:

$$x^3 = x^3 \text{ (I)}$$

$$(x - r)^3 = x^3 - 3x^2r + 3xr^2 - r^3 \text{ (II)}$$

$$(x + r)^3 = x^3 + 3x^2r + 3xr^2 + r^3, \text{ (III)}$$

$$(x - 2r)^3 = x^3 - 6x^2r + 12xr^2 - 8r^3 \text{ (IV)}$$

e

$$(x + 2r)^3 = x^3 + 6x^2r + 12xr^2 + 8r^3. \text{ (V)}$$

Somam-se membro a membro de (I) a (V) acima, efetuando os cancelamentos que são evidentes e usando a hipótese de que a soma dos cubos dos cinco termos é igual a 3025, obtém-se:

$$5x^3 + 30xr^2 = 3025. \text{ (VI)}$$

Substituindo x = 5 na equação (VI), chega-se a

$$150r^2 = 3025 – 625 \Rightarrow r^2 = \frac{2400}{150} = 16.$$

Sendo assim, r = 4 ou r = −4.

Como r = 4, pois a PA é crescente, Então:

$$a_1 = x - 2r = 5 – 2.4 = –3,$$

$$a_2 = x – r = 5 – 4 = 1,$$

$$a_3 = x = 5,$$

$$a_4 = x + r = 5 + 4 = 9,$$

$$a_5 = x + 2r = 5 + 2.4 = 13.$$

Portanto, os termos da PA são –3, 1, 5, 9 e 13.

2.9 Usando progressões aritméticas nas resoluções de problemas

Problema 2.1 Mostre que, se os números (a, b, c) forma nessa ordem uma PA, então o mesmo ocorre com os números (a^2bc, ab^2c, abc^2).

Solução. Por hipótese, tem-se:

$$b - a = c - b = r.$$

Multiplica-se por abc ambos os lados da igualdade $b - a = c - b$ e aplica-se a distributiva, tem-se:

$$(b - a)abc = (c - b)abc$$
$$ab^2c - a^2bc = abc^2 - ab^2c$$

Como $ab^2c - a^2bc = abc^2 - ab^2c$, então (a^2bc, ab^2c, abc^2) é uma PA.

Problema 2.2 Uma sequência $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma PA se, e somente se,

$$a_{k+2} + a_k = 2a_{k+1}, \forall k \geq 1.$$

Solução. $(\Rightarrow)$ Note que, se $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma PA de razão r, então tem-se:

$$a_{k+2} - a_{k+1} = r = a_{k+1} - a_k, \forall k \geq 1.$$

Mas isso implica em:

$$a_{k+1} + a_k = 2a_{k+1}, \forall k \geq 1.$$

$(\Leftarrow)$ Se $a_{k+2} + a_k = 2a_{k+1}, \forall k \geq 1$, então, reescreve-se tal igualdade como $a_{k+2} - a_{k+1} = a_{k+1} - a_k, \forall k \geq 1$.

Logo,

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = ...$$

Assim, $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma PA de razão $r = a_2 - a_1$.

Problema 2.3 Prove que, se os números $\left(\frac{1}{x+y}, \frac{1}{y+z}, \frac{1}{z+x}\right)$ forma nessa ordem uma PA, então o mesmo ocorre com os números (z^2, x^2, y^2).

Solução. Como, por hipótese, $\left(\frac{1}{x+y}, \frac{1}{y+z}, \frac{1}{z+x}\right)$ é uma PA, então, tem-se:

$$\frac{1}{y+z} - \frac{1}{x+y} = \frac{1}{z+x} - \frac{1}{y+z} \Rightarrow \frac{y-x}{(y+z)(x+y)} = \frac{x-z}{(z+x)(y+z)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (y - x)(z + x)(y + z) = (x - z)(y + z)(x + y).$$

Simplifica-se, tem-se:

$$(y - x)(z + x) = (x - z)(x + y) \Rightarrow y^2 - x^2 = x^2 - z^2.$$

Dessa forma, $y^2 - x^2 = x^2 - z^2 \Leftrightarrow (z^2, x^2, y^2)$.

Problema 2.4 Seja $(a_k)_{k\geq 1}$ uma PA de razão r. Mostre que as sequências $(b_k)_{k\geq 1}$ e $(c_k)_{k\geq 1}$, definidas por $b_k = a_{2k}$ e $c_k = a_{2k-1}$ para todo $k\geq 1$, também são PAs, mas ambas de razão igual a 2r.

Solução. Observa-se que as leis de formação das sequências $(b_k)_{k\geq 1}$ e $(c_k)_{k\geq 1}$ são, respectivamente, $(a_2, a_4, a_6, ...)$ e $(a_1, a_3, a_5, ...)$.

Note que, para todo $k\geq 1$ inteiros, tem-se:

$$b_{k+1} - b_k = a_{2(k+1)} - a_{2k} = a_{2k+2} - a_{2k}.$$

A fim de utilizar o fato de que $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma PA de razão r, soma-se e subtrai o termo a_{2k+1} à diferença $a_{2k+2} - a_{2k}$, obtém-se:

$$\begin{aligned} b_{k+1} - b_k &= a_{2k+2} - a_{2k} \\ &= (a_{2k+2} - a_{2k+1}) + (a_{2k+1} - a_{2k}) \\ &= r + r \\ &= 2r. \end{aligned}$$

Portanto, $(b_k)_{k\geq 1}$ é uma PA de razão 2r.

A prova de que $(c_k)_{k\geq 1}$ também é uma PA de razão 2r é análoga e fica como exercício.

Problema 2.5 Prove que, se uma PA apresenta $a_m = x$, $a_n = y$ e $a_p = z$, então verifica-se a relação:

$$(n - p).x + (p - m).y + (m - n).z = 0.$$

Solução. Por hipótese,

$$x = a_m = a_1 + (m - 1)r,$$

$$y = a_n = a_1 + (n - 1)r,$$

$$z = a_p = a_1 + (p - 1)r.$$

Então:

$$(n - p)x + (p - m)y + (m - n)z =$$

$$= (n - p)[a_1 + (m - 1)r] + (p - m)[a_1 + (n - 1)r] + (m - n)[a_1 + (p - 1)r] =$$

$$= a_1(n - p + p - m - n) + r[(n - p)(m - 1) + (p - m)(n - 1) + (m - n)(p - 1)] =$$

$$= a_1 \,.\, 0 + r \,.\, 0 = 0.$$

Problema 2.6 Mostre que os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ não são termos de uma mesma progressão aritmética.

Solução. Supondo, por absurdo, que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ são termos de uma mesma PA. Logo: $\sqrt{2} = a_0 + m.r$, $\sqrt{3} = a_0 + n.r$, $\sqrt{5} = a_0 + p.r$, onde r é a razão da PA e m, n e p $\in \mathbb{N}$.

Sendo assim,

$$r = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{n-m} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{p-n} \Rightarrow (p - n)\sqrt{3} + (n - p)\sqrt{2} = (n - m)\sqrt{5} + (m - n)\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (p - m)\sqrt{3} + (n - p)\sqrt{2} = (n - m)\sqrt{5}.$$

Fazendo, a = (p – m), b = (n – p) e c = (n – m), com a, b e c $\in \mathbb{N}$, tem-se:

$$a\sqrt{3} + b\sqrt{2} = c\sqrt{5}.$$

Eleva-se ao quadrado a expressão anterior e simplificando, tem-se:

$$\sqrt{6} = \frac{5c^2-2a^2-3b^2}{2ab}.$$

Como a, b e c são números inteiros e a expressão afirma que $\sqrt{6}$ é racional, que é uma contradição.

Portanto, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ não podem ser termos de uma mesma progressão aritmética.

Problema 2.7 Seja (a_n) uma progressão aritmética com termos não nulos. Prove, por indução em n, que:

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \cdots + \frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{n}{a_1a_{n+1}}, \forall\ n \geq 1.$$

Solução. Seja P(n) a proposição:

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \cdots + \frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{n}{a_1a_{n+1}}, \forall\ n \geq 1.$$

i) Verifica-se que para n = 1é verdadeira, pois:

$$\frac{1}{a_1a_2} = \frac{1}{a_1a_{1+1}} \Rightarrow \frac{1}{a_1a_2} = \frac{1}{a_1a_2}$$

ii) Suponha que P(n) é verdadeira para um n ≥ 1, ou seja,

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \cdots + \frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{n}{a_1a_{n+1}}.$$

Resta provar que P(n) implica P(n + 1).

De fato, pela hipótese de indução, tem-se que:

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \cdots + \frac{1}{a_na_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}} = \frac{n}{a_1a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}} = \frac{n.a_{n+2}+a_1}{a_1.a_{n+1}.a_{n+2}}.$$

Como a_n é uma progressão aritmética PA, troca-se a_{n+2} por a_1+ (n – 1)r e depois a_1 + nr por a_{n+1}, onde r é a razão da PA. Assim, segue que:

$$\frac{n.a_{n+2}+a_1}{a_1.a_{n+1}.a_{n+2}} = \frac{n[a_1+(n+1)r]+ a_1}{a_1.a_{n+1}.a_{n+2}} = \frac{(n+1)(a_1+nr)}{a_1.a_{n+1}.a_{n+2}} = \frac{(n+1)\ .\ a_{n+1}}{a_1.a_{n+1}.a_{n+2}} = \frac{n+1}{a_1.a_{n+2}}$$

Portanto, P(n + 1) é verdadeira.

Problema 2.8 Seja (a_n) uma progressão aritmética e seja (b_n) a sequência definida por

$$b_n = a_n + a_{n+1}, \forall\ n \geq 1.$$

Mostre que (b_n) também é uma progressão aritmética.

Uma solução. Note, pelo termo geral, que:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

e

$$a_{n+1} = a_1 + nr.$$

Como $b_n = a_n + a_{n+1}$, então:

$$b_n = a_1 + (n-1)r + a_1 + nr$$

$$b_n = 2a_1 + (n-1)r + nr$$

$$b_n = 2a_1 + r + (n-1)2r$$

Portanto, b_n é uma progressão aritmética de primeiro termo $(2a_1 + r)$ e razão $(2r)$.

Outra solução. Pela definição de progressão aritmética, tem-se:

$$b_{n+1} - b_n = (a_{n+1} + a_{n+2}) - (a_n + a_{n+1}) = a_{n+2} - a_n = 2r,$$

sendo que r é a razão de (a_n).

Logo, (b_n) é uma PA de razão 2r.

Problema 2.9 Prove que os termos comuns das PAs (2, 15, 28, 41, . . .) e (7, 12, 17, 22, . . .) são uma PA de primeiro termo igual 67 e razão 65.

Solução. Denotam-se por (a_n) e (b_m) as PAs (2, 15, 28, 41, . . .) e (7, 12, 17, 22, . . .), respectivamente. Como a_n tem razão 13 e b_m tem razão 5, utiliza-se a fórmula do termo geral, obtém-se:

$$a_n = 2 + 13(n-1)$$

e

$$b_m = 7 + 5(m-1).$$

Agora, fazem-se $a_n = b_m$ com o objetivo de encontrar condições sobre m e n para que ocorram termos comuns.

Assim, tem-se:

$$a_n = b_m \Rightarrow 2 + 13(n-1) = 7 + 5(m-1) \Rightarrow 5m = 13(n-1)$$

$$\Rightarrow 13|5m$$

$$\Rightarrow 13|m.$$

Desse modo, se um natural x pertence as duas PAs, então $x = b_{13k}$, para algum inteiro $k \geq 1$, ou seja,

$$x = b_{13k}$$

$$x = 7 + 5(13k-1)$$

$$x = 65k + 2$$

Reciprocamente, percebe-se que, para qualquer $k \geq 1$, o número $65k + 2$ pertence às duas PAs. De fato, já viu-se que $65k + 2 = b_{13k}$. Por outro lado,

$$65k + 2 = 2 + 13.5k$$

$$65k + 2 = 2 + 13((5k+1) - 1)$$

$$65k + 2 = a_{5k+1}$$

Portanto, os termos comuns das duas PAs também formam uma PA, que possui primeiro termo igual a 67 e razão igual a 65, isto é:

$$(67, 132, 197, ...)$$

Problema 2.10 Se (a, a + r. a + 2r, ...) é uma PA infinita e não constante de naturais, prove que pelo menos um de seus termos é composto.

Solução. Pode-se escrever o termo geral da PA como $a + (n - 1)r$. Como a PA é não constante, tem-se $r > 0$.

Por outro lado, como ela é infinita e seus termos são todos naturais, tem-se $a + (n - 1)r < 0$, pois, se esse fosse o caso, ter-se-ia $a + (n - 1)r < 0$ para n suficientemente grande. Logo, $r > 0$.

Agora, mostra-se que, dados $a, r \in \mathbb{N}$, é possível escolher n forma que $a + (n - 1)r$ seja composto. Para tanto, veja que, se $n = 2a + 1$, então:

$$a + (n - 1)r = a + 2ar = a(1 + 2r).$$

Esse número é composto se $a > 1$, mas pode ser primo se $a = 1$. Entretanto, se $a = 1$, então $a + r > 1$, e pode-se repetir o argumento acima escolhendo $n = 2(a + r) + 2$.

Nota-se:

$$a + (n - 1)r = (a + r) + (n - 2)r = (a + r) + 2(a + r) = 3(a + r),$$

o qual é composto.

Problema 2.11 Demonstre que em toda PA, com número ímpar de termos, o termo médio é igual à diferença entre a soma dos termos de ordem ímpar e a soma dos termos de ordem par.

Solução. Seja $(a_1, a_2, ..., a_{n+1}, ..., a_{2n}, a_{2n+1})$ uma PA com números ímpar de termos. Então, o termo médio é média aritmética entre os extremos e essa relação também é válida entre os índices desses termos.

Assim:

$$\frac{2n+1+1}{2} = \frac{2n+2}{2} = n + 1 \text{ (índice do termo médio).}$$

Tem-se, ainda:

$$a_{2n+1} = a_1 + 2nr.$$

e

$$a_{2n} = a_1 + (2n - 1)r.$$

Mas,

$$S_i = \frac{(a_1+a_1+2nr)(2n+1)}{2} = (a_1 + nr)(2n + 1)\ .$$

e

$$S_p = \frac{[a_1+r+a_1+(2n-1)r]2n}{2} = 2(a_1 + nr).n$$

Fazendo a diferença, tem-se:

$$\begin{aligned} S_i - S_p &= (a_1 + nr)(2n + 1) - 2(a_1 + nr)n \\ &= (a_1 + nr)(2n + 1 - 2n) \\ &= a_1 + nr \\ &= a_{n+1} \text{ (termo médio)} \end{aligned}$$

Problema 2.12 Seja (a_n) uma progressão aritmética e seja (b_n) a sequência definida por

$$b_n = a_n + a_{n+1},\ \forall\ n \geq 1.$$

Suponha que a soma dos n primeiros termos da sequência (a_n) seja igual a $2n^2 + 5n$, para todo natural $n \geq 1$. Mostre que a expressão para a soma dos n primeiros termos de (b_n) é $4n^2 + 14$.

Solução. Note que pela sequência $b_n = a_n + a_{n+1}$, tem-se:

$$b_1 + b_2 + ... + b_n = (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + ... + (a_n + a_{n+1}).$$

Reorganizando, resulta-se:

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n) + (a_2 + a_3 + \dots + a_{n+1}) = S_n + S_{n+1} - S_1$$

Como $S_n = (a_1 + a_n).\frac{n}{2}$ e $S_n = 2n^2 + 5n$, então:

$$S_n + S_{n+1} - S_1 = 2n^2 + 5n + 2(n + 1)^2 + 5(n + 1) - 7 = 4n^2 + 14n$$

Problema 2.13 Mostre que (a_n) é uma progressão aritmética se, e somente se, existem números reais A e B tais que $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = An^2 + Bn$, para todo n inteiro positivo.

Solução. (⇒) Suponha-se que (a_n) seja uma progressão aritmética de razão r e primeiro termo a_1. Mostra-se, então, que existem números reais A e B tais que $S_n = An^2 + Bn$.

Note que:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2},\ \text{com } a_n = a_1 + (n-1)r.$$

Então,

$$S_n = \frac{[a_1 + a_1 + (n-1)r]n}{2} = \frac{r}{2}n^2 + (a_1 - \frac{r}{2})n.$$

Toma-se $A = \frac{r}{2}$ e $B = a_1 - \frac{r}{2}$, tem-se que $S_n = An^2 + Bn$.

(⇐) Suponha-se que $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = An^2 + Bn$. Note que $a_n = S_n - S_{n-1}$, para n > 1, e $a_1 = S_1$. Assim,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = An^2 + Bn - [A(n-1)^2 + B(n-1)] =$$
$$= (2A)n - A + B = (A + B) + 2A(n-1).$$

Toma-se $a_1 = A + B$ e $r = 2A$, tem-se que (a_n) é uma progressão aritmética de razão 2A e primeiro termo A + B.

Problema 2.14 Os lados de um triângulo retângulos formam uma progressão aritmética crescente. Mostre que a razão dessa progressão é igual ao raio do círculo inscrito.

Solução. Representa-se os lados do triângulo por $x - r$, x, $x + r$.

Como a progressão é crescente, a hipotenusa é o último termo, isto é, $x + r$. Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$(x + r)^2 = (x - r)^2 + x^2.$$

Dai,

$$x^2 = 4rx \Rightarrow x = 4r,$$

já que $x \neq 0$, pois x é um dos catetos.

Dessa forma, os lados do triângulo são3r, 4r e 5r.

O perímetro é $2p = 3r + 4r + 5r = 12r$ e a área é $\frac{S}{p} = \frac{6r^2}{6r} = r$.

Portanto, razão da progressão é igual ao raio do círculo inscrito.

Problema 2.15 Sabendo que os termos $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ estão em progressão aritmética. Prove que:

$$(\delta + 3\beta)(\delta - 3\beta) + (\alpha + 3\gamma)(\alpha - 3\gamma) = 2(\alpha\delta - 9\beta\gamma)$$

Solução. Utiliza-se o caso excepcional de 4 termos para progressões aritméticas, isto é, $\alpha = x - 3r$, $\beta = x - r$, $\gamma = x + r$ e $\delta = x + 3r$. Logo,

$$(\delta + 3\beta)(\delta - 3\beta) + (\alpha + 3\gamma)(\alpha - 3\gamma) = 4x(6r - 2x) + 4x(-6r - 2x) = 4x(-4x) = -16x^2.$$

Agora,

$$2(\alpha\delta - 9\beta\gamma) = 2(x^2 - 9r^2 - 9x^2 - 9r^2) = -16x^2$$

Então, $(\delta + 3\beta)(\delta - 3\beta) + (\alpha + 3\gamma)(\alpha - 3\gamma) = 2(\alpha\delta - 9\beta\gamma)$

3 PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

3.1 Definição de uma progressão geométrica

Definição 3.1 PG é uma sequência de números (a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n, ...) onde cada termo a partir do segundo, é o quociente da divisão de cada termo pelo termo anterior. Esse quociente é chamado de razão e é representado pela letra q (LIMA, 2013; MORGADO et al, 2015). Assim, tem-se:

$$a_2 = a_1 q,$$
$$a_3 = a_2 q = a_1 q^2,$$
$$a_4 = a_3 q = a_1 q^3,$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Se a sequência (a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n) é uma PG, então:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \cdots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

Essa sequência pode ser representada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$a_n = a_{n-1} q \tag{13}$$

onde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, a_n e a_{n-1} são, respectivamente, os termos de ordem n e n – 1 na sequência e a constante q é a razão da PG.

Exemplo 3.1 A sequência (1, 3, 9, 27) é uma PG finita de 4 termos e razão q = 3, pois:

$$\frac{3}{1} = \frac{9}{3} = \frac{27}{9} = 3$$

Exemplo 3.2 A sequência $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$ é uma PG infinita de razão q = $\frac{1}{2}$, pois:

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} = \ldots = q.$$

3.2 Classificação de uma progressão geométrica

Classificam-se as progressões geométricas em cinco categorias segundo a sua razão:

a) Crescentes: quando cada termo, a partir do segundo, é maior que o anterior. Isso ocorre só em dois casos:

i) $a_1 > 0$ e $q > 1$, isto é:

$$a_n > a_{n-1} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \Leftrightarrow q > 1$$

Exemplo 3.3 A PG (1, 2, 4, 8, ...) satisfaz a condição, pois q = 2 e a_1 = 1.

ii) a_1 < 0 e 0 < q < 1, isto é,

$$a_n > a_{n-1} \Leftrightarrow 0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \Leftrightarrow 0 < q < 1$$

Exemplo 3.4 A PG (–4, –2, –1, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{8}$, ...) satisfaz a condição, pois q = $\frac{1}{2}$ e a_1 = –4.

b) Decrescentes: quando cada termo, a partir do segundo, é menor que o anterior. Isso só ocorre em dois casos:

i) a_1 > 0 e 0 < q < 1, isto é,

$$a_n < a_{n-1} \Leftrightarrow 0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \Leftrightarrow 0 < q < 1$$

Exemplo 3.5 A progressão geométrica (7, $\frac{7}{2}$, $\frac{7}{4}$, ...) satisfaz a condição, pois a_1 = 7 e q = $\frac{1}{2}$.

ii) a_1 < 0 e q > 1, isto é,

$$a_n < a_{n-1} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \Leftrightarrow q > 1$$

Exemplo 3.6 A PG (–6, –12, –24, ...) satisfaz a condição, pois a_1 = –6 e q = 2

c) Constantes: quando todos os seus elementos são iguais.

i) a_1 = 0 e q qualquer, isto é,

Exemplo 3.7 A PG (0, 0, 0, ...) satisfaz a condição, pois $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots a_n = 0$

ii) q = 1, isto é,

$$a_n = a_{n-1} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \Leftrightarrow q > 1$$

Exemplo 3.8 A PG (4, 4, 4, ...) satisfaz a condição, pois q = 1.

d) **Alternantes**: ocorre quando cada termo possui sinal contrário ao termo anterior, q < 0.

Exemplo 3.9 A progressão geométrica (1, –4, 16, –64, ...) satisfaz a condição, pois q = –4

e) **Estacionárias**: Se $a_1 \neq 0$ e $a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$. Isso ocorre quando q = 0.

Exemplo 3.10 A PG (12, 0, 0, 0, ...) satisfaz a condição, pois a_1 = 12 e q = 0

3.3 Fórmula do termo geral de uma progressão geométrica

As progressões geométricas possuem um termo geral, isto é, uma lei que permite determinar a posição de certo termo. A partir da definição é possível obter todos os termos de uma PG se conhecer o seu primeiro termo a_1 e a sua razão q.

Teorema 4. Se (a_n) é uma progressão geométrica de razão q, então:

$$\mathbf{a_n = a_1 q^{n-1}} \tag{14}$$

para todo n inteiro positivo.

Demonstração. Por indução matemática finita, tem-se:

1º) P(1) é verdadeira, pois

para $n = 1 \Rightarrow a_1 = a_1 q^{(1-1)}$

2º) Supondo que P(n), com $n \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \text{ (hipótese da Indução)}$$

e prova-se que P(n + 1) é verdadeira.

Da definição 3.1, tem-se:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \Rightarrow a_{n+1} = a_n q. \tag{15}$$

Mas, por hipótese $a_n = a_1 q^{n-1}$, então, substituindo-se (14) em (15), tem-se:

$$a_{n+1} = q(a_1 q^{n-1})$$

$$a_{n+1} = a_1 q q^{n-1}$$

$$a_{n+1} = a_1 q^n$$

Portanto, P(n + 1) é válida para $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Existem outras formas de se chegar ao teorema 4.

Seja progressão geométrica $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n ...)$, para avançar um termo, multiplica-se o termo pela razão; para avançar dois termos, multiplica-se duas vezes a razão, e assim sucessivamente (MORGADO e CARVALHO, 2014). Observe para outros termos quaisquer:

$a_8 = a_3 q^5$ (ao passar de a_3 para o a_8, avançam-se 5 termos);

$a_{14} = a_6 q^8$ (ao passar de a_6 para o a_{14}, avançam-se 8 termos);

$a_3 = \frac{a_{12}}{q^9}$ (retrocederam 9 termos ao passar de a_3 para o a_{12});

Para o termo geral, tem-se:

$a_n = a_1q^{n-1}$ (ao passar de a_1 para o a_n, avançam-se n – 1 termos).

Outro caso, por recorrência.

Seja a progressão geométrica (a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...) de razão q, então, por recorrência, tem-se:

$$a_2 = a_1q$$
$$a_3 = a_2q$$
$$a_4 = a_3q$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1}q$$

Multiplicam-se membro a membro as (n – 1) igualdades, tem-se:

$$\mathbf{a_n = a_1q^{n-1}}$$

Exemplo 3.11 Em uma progressão geométrica, o quarto termo vale 6 e o sexto termo vale 24. Quanto vale o sétimo termo dessa progressão?

Solução. Tem-se que $a_6 = a_4q^2$ ao passar de a_4 para o a_6, avançam-se 2 termos. Logo, $24 = 6q^2$ e $q = 2$. Analogamente, $a_7 = a_6q = 24.2 = 48$. O sétimo termo vale 48.

3.4 Propriedades de uma progressão geométrica

Propriedade (G1). Seja (a_n) uma PG finita, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

Demonstração. Seja a PG finita (a_1, a_2, a_3, ..., a_p, a_{p+1}, ..., a_{n-p}, ..., a_n) de razão q.

Os termos a_{p+1} e a_{n-p} são equidistantes dos extremos, pois antes de a_{p+1} existem p (p + 1 – 1 = p) termos e depois de a_{n-p} existem, também, p (n – n + p = p) termos. Então, resta prova-se que:

$$a_{p+1}a_{n-p} = a_1a_n.$$

Assim, usa-se a fórmula do termo geral em a_{p+1} e a_{n-p}, isto é:

$$a_{p+1} = a_1q^p \qquad (16)$$

e

$$a_{n-p} = a_1q^{n-p-1} \qquad (17)$$

Agora, multiplica-se (16) e (17), tem-se:

$$(a_{p+1})(a_{n-p}) = a_1 q^p a_1 q^{n-p-1} = a_1 a_1 q^{n-1} = a_1 a_n$$

Propriedade (G2). A sequência (a, b, c), com $a \neq 0$, é PG se, e somente se, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos extremos, isto é, $b^2 = ac$.

Demonstração. A sequência (a, b, c), com $a \neq 0$, é PG se, e somente se, existir uma constante q tal que:

$$b = aq \tag{18}$$

e

$$c = bq \tag{19}$$

Como $a \neq 0$, então escrevem-se:

$$q = \frac{b}{a} \tag{20}$$

Substitui-se (20) em (19), tem-se:

$$c = b.\frac{b}{a} \Leftrightarrow b^2 = ac. \tag{21}$$

Uma consequência das propriedades (G1) e (G2) é: seja (a_n) uma PG com número ímpar de termos, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos extremos.

Demonstração. Seja a_p o termo médio da PG (a_1, a_2, ..., a_{p-1}, a_p, a_{p+1}, ..., a_n), com número ímpares de termos.

Então, a sequência (a_{p-1}, a_p, a_{p+1}) também é uma PG.

Assim, pela propriedade (G2), tem-se que:

$$a_p^2 = a_{p-1} a_{p+1} \tag{22}$$

Mas, os termos a_{p-1}, e a_{p+1} são equidistantes dos extremos a_1 e a_n. Logo, pela propriedade (G1), tem-se que:

$$a_{p-1} a_{p+1} = a_1 a_n \tag{23}$$

Portanto, por (22) e (23) tem-se que:

$$a_p^2 = a_1 a_n \tag{24}$$

Exemplo 3.12 Seja (a_n) uma progressão geométrica de termos 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128. Mostre a validade das propriedades das progressões geométricas (G1), (G2) e a consequência das duas.

Solução.

Por (G1), tem-se:

$$2.128 = 4.64 = 8.32 = 256$$

Por (G2), tem-se:

$$4^2 = 2.8,\ 8^2 = 4.16,\ 16^2 = 8.32,\ 32^2 = 16.64,\ 64^2 = 32.128$$

Pela consequência de (G1) e (G2), tem-se:

$$16^2 = 2.128$$

3.5 Interpolação geométrica

Interpolação geométrica é um dispositivo prático que ajuda em muitos casos de resoluções de problemas envolvendo progressão geométrica. Esse dispositivo consiste em determinar quais números, em uma certa quantidade n fornecida, devem ser inseridos entre dois números dados de modo que estes n + 2 números formem uma progressão geométrica.

Inserindo k meios geométricos entre os entremos (a_1 e a_n) de uma PG para tanto, essa progressão terá k + 2 termos. Para determinar os meios dessa PG é necessário calcular a razão que pode ser feito dessa forma:

Pelo termo geral ($a_n = a_1 q^{n-1}$) da PG e com k + 2 termos, a razão vale:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow a_n = a_1 q^{k+1} \Rightarrow \frac{a_n}{a_1} = q^{k+1} \Rightarrow q = \sqrt[k+1]{\frac{a_n}{a_1}} \tag{25}$$

Dessa forma, tem-se a expressão acima que nos permite calcular a razão de uma PG, inserindo k meios geométricos entre os extremos.

Exemplo 3.13 Quantos termos terão a PG quando se inserem k meios geométricos entre 5 e 320, sabendo que a razão da PG vale 2?

Solução. Seja a PG de termos (a_1, a_2,..., a_n). Como foram inseridos k meios geométricos, então a progressão terá k + 2 termos.

Note que o termo geral da PG é:

$$a_n = a_1q^{n-1}.$$

Substituindo a_1= 5, a_n= 320 e n = k +2, tem-se:

$$320 = 5.2^{k+2-1} \Rightarrow 2^{k+1} = 64 \Rightarrow 2^{k+1} = 2^6 \Rightarrow k = 5$$

Portanto, a progressão geométrica terá 7 termos, pois k = 5 ⇒ n = 7.

3.6 Soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica finita

Assim como nas progressões aritméticas, é possível também obter nas progressões geométricas uma fórmula que permite determinar a soma dos n primeiros termos pelo teorema a seguir.

Teorema 5. Se (a_n) é uma progressão geométrica de razão q, então:

$$S_n = \frac{a_1q^n - a_1}{q-1}, q \neq 1 \quad (26)$$

para todo n inteiro e positivo.

Demonstração. Seja a PG (a_1, a_2, a_3, ..., a_n) e S_n a soma dos n primeiros termos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n \quad (27)$$

Multiplica-se por q (q ≠ 0) ambos membro da igualdade (27), vem:

$$qS_n = q(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n) \quad (28)$$

Aplica-se a distributiva no segundo membro da igualdade (28), tem-se:

$$qS_n = a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + a_nq \quad (29)$$

Fazem-se (29) – (27) tem-se:

$$qS_n - S_n = (a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + a_nq) - (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n(q-1) = a_nq - a_1.$$

Como $a_n = a_1q^{n-1}$, vem:

$$S_n(q-1) = a_1q^{n-1}q - a_1 \Rightarrow S_n(q-1) = a_1q^n - a_1$$

Portanto,

$$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}, q \neq 1$$

Outra demonstração do teorema 5. Por indução matemática finita, tem-se:

$$S_n = \frac{a_1q^n - a_1}{q-1}, q \neq 1.$$

1º) Verifica-se que P(1) é verdadeira.

Para n = 1, tem-se:

$$S_1 = \frac{a_1q^1 - a_1}{q-1} \Leftrightarrow S_1 = \frac{a_1(q-1)}{q-1} \Leftrightarrow S_1 = a_1$$

2º) Supondo que P(n), com $n \in \mathbb{N}$, seja verdadeira, isto é:

$$S_n = \frac{a_1q^n - a_1}{q-1} \text{ (hipótese de Indução).}$$

E prova-se que P(n + 1) é verdadeira.

Como $S_{n+1} - S_n = a_1q^n$, então $S_{n+1} = S_n + a_1q^n$

Mas, por hipótese $S_n = \frac{a_1q^n - a_1}{q-1}$, então:

$$S_{n+1} = S_n + a_1q^n \Leftrightarrow S_{n+1} = \frac{a_1q^n - a_1}{q-1} + a_1q^n \Leftrightarrow S_{n+1} = \frac{a_1q^n - a_1 + a_1q^n(q-1)}{q-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_{n+1} = \frac{a_1(q^n - 1 + q^{n+1} - q^n)}{q-1} \Leftrightarrow S_{n+1} = \frac{a_1(q^{n+1}-1)}{q-1} \Leftrightarrow S_{n+1} = \frac{a_1q^{n+1} - a_1}{q-1}$$

Portanto, P(n + 1) é válida $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Agora, se razão q = 1, a fórmula acima não pode ser aplicada. Nesse caso, todos os termos da PG são iguais. Assim,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_1 + a_1 + \ldots + a_1}_{\text{n vezes}}$$

$$S_n = n.a_1$$

Exemplo 3.14 Calcular a soma dos 7 primeiros termos da PG $\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, 9, \ldots\right)$

Solução. Aplica-se o Teorema 5, isto é:

$$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1},$$

para $a_1 = \frac{1}{9}$, q = 3 e n = 7.

Então,

$$S_9 = \frac{\frac{1}{9}(3^7-1)}{3-1} = \frac{\frac{1}{9}(2186)}{2} = \frac{1093}{9}.$$

Exemplo 3.15 Calcular a soma dos 20 primeiros termos da PG (3, 3, 3, 3, 3, ...)

Solução. Como a PG é constante, isto é, q = 1, então a soma dos 20 primeiros termos é dada por:

$$S_n = n.a_1 \Rightarrow S_{20} = 20a_1 \Rightarrow S_{20} = 20.3 = 60.$$

3.7 Soma dos termos de uma progressão geométrica infinita

Diferente das progressões aritméticas, que não são possíveis computarem a soma dos infinitos termos, as PGs de infinitos termos são computadas, desde que a razão q encontra-se num intervalo aberto (–1, 1) .

Teorema 6. Se (a_n) é uma progressão geométrica de razão $|q| < 1$ e S_∞ é a soma dos infinitos termos da PG, então

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}, \tag{30}$$

para todo n inteiro positivo.

Demonstração. Note que a soma dos n primeiros termos de uma PG de razão q, $q \neq 1$, é dada por:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Então, fazem-se o produto de a_1 por $(1 - q^n)$ e escrevem-se a expressão em soma de frações tem-se:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1 q^n}{1-q}.$$

Como $|q| < 1$ implica em $-1 < q < 1$, tem-se que q^n tende a zero quando n tende a mais infinito ($+\infty$).

Assim, a expressão

$$\frac{a_1 q^n}{1-q} \to 0.$$

Logo, a expressão

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1 q^n}{1-q} \to \frac{a_1}{1-q}$$

quando $n \to +\infty$, isto é:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Portanto, tem-se:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}.$$

Exemplo 3.16 Determinar a geratriz da dízima periódica D = 5,444...

Solução. Note que D = 5 + 0,4 + 0,04 + 0,004 + ...

Mas 0,4 + 0,04 + 0,004 + ...

é uma PG infinita de primeiro termo a_1 = 0,4 e razão q = 0,1.

Então, aplica-se o teorema 6, isto é:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}.$$

Logo,

$$S_\infty = \frac{0,4}{1-0,1} \Rightarrow S_\infty = \frac{4}{9}.$$

Assim,

$$D = 5 + \frac{4}{9} \Rightarrow D = \frac{49}{9}.$$

3.8 Produto dos termos de uma progressão geométrica

Teorema 7. Se P_n é o produto dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão q, então $P_n = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$; para todo n inteiro e positivo.

Demonstração. Pelo termo geral, tem-se:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 q$$
$$a_3 = a_1 q^2$$
$$a_4 = a_1 q^3$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Multiplica-se membro a membro as igualdades, vem:

$$a_1 . a_2 . a_3 ... a_n = \underbrace{a_1 . a_1 . a_1 ... a_1}_{\text{n fatores}} . q.q^2.q^3 ... q^{n-1}$$

Então,

$$P_n = a_1^n.q^{(1 + 2 + 3 + ... + n - 1)}$$

Mas (1 + 2 + 3 + ...+ n – 1) = $\frac{n(n-1)}{2}$, pois representa-se uma PA de primeiro termo igual a 1, razão r = 1 e n – 1 termos.

Assim,

$$P_n = a_1^n . q^{\frac{n(n-1)}{2}} \tag{31}$$

Exemplo 3.17 Calcular o produto dos 5 primeiros termos da PG (2, 6, 18, ...).

Solução. Aplica-se o Teorema 7, que é

$$P_n = a_1^n . q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Como a_1= 2, n = 5 e q = 3, então

$$P_5 = 2^5 . 3^{\frac{5(5-1)}{2}} \Rightarrow P_5 = 2^5.3^{10}$$

3.9 Casos Excepcionais de progressão geométrica

De maneira similar a PA, é importante representar algumas progressões geométricas por meios genéricos, ou seja, uma progressão geométrica de três, quatro ou cinco termos, pois esses casos resolver-se-á problemas envolvendo progressões geométricas.

1º) A sequência $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$ é uma PG de três termos e razão q, para quaisquer valores de x e q, com $q \neq 0$.

A progressão geométrica com termos (x, xq, xq^2) pode ser adotada, mas só serve para criar denominadores e complicar o processo de resolução, ou seja, é desnecessário. (LIMA et al, 2006)

2º) A sequência $\left(\frac{x}{q^3}, \frac{x}{q}, xq, xq^3\right)$ é uma PG de quatro termos e razão q^2, para quaisquer valores de x e q, com $q \neq 0$.

3º) A sequência $\left(\frac{x}{q^2}, \frac{x}{q}, x, xq, xq^2\right)$ é uma PG de quatro termos e razão q^2, para quaisquer valores de x e q, com $q \neq 0$.

Exemplo 3.18. Em uma progressão geométrica, o produto dos três primeiros termos é 8. Determine esses termos, sabendo que soma do segundo com o terceiro é 18.

Solução. A representação mais adequada é $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$ quando se conhece o produto dos três termos.

Então, tem-se:

$$\frac{x}{q} \cdot x \cdot xq = 8 \Rightarrow x^3 = 8$$

e

$$x + xq = 18$$

Sendo assim, $x = 2$ e $x + xq = 18$.

Substituem-se $x = 2$ em $x + xq = 18$, obtêm-se:

$$2 + 2q = 18 \Rightarrow q = 8.$$

Logo, a PG $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$ para $x = 2$ e $q = 8$ é $\left(\frac{1}{4}, 2, 16\right)$.

3.10 Usando progressões geométricas nas resoluções de problemas

Problema 3.1 Prove que, se x, y, z estão em PG, nessa ordem, então:

$$(x + y + z)(x - y + z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Solução.

Fazem-se a distributiva em $(x + y + z)(x - y + z)$, tem-se:

$$x^2 + 2xz - y^2 + z^2$$

Como x, y e z estão em PG, nessa ordem, então pela propriedade (G2) tem-se $y^2 = xz$.

Assim, vem:

$$x^2 + 2xz - y^2 + z^2 = x^2 + 2y^2 - y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Problema 3.2 Se (a_n) é uma progressão geométrica de termos positivos, prove que (b_n) definida por $b_n = \log a_n$ é uma progressão aritmética.

Solução.

Como $b_{n+1} - b_n = \log a_{n+1} - \log a_n = \log \frac{a_{n+1}}{a_n} = \log q =$ constante, sendo q a razão da progressão geométrica (a_n), então (b_n) é uma progressão aritmética.

Problema 3.3. Mostre que, se a, b, c, d, nessa ordem, estão em PG, então vale a relação:

$$(b - c)^2 = ac + bd - 2ad.$$

Solução.

Como (a, b, c, d) estão em PG, então por (G1) e (G3), tem-se:

$$b^2 = ac$$

$$c^2 = bd$$

e

$$ad = bc$$

Assim, tem-se:

$$(b - c)^2 = b^2 - 2bc + c^2 = ac + bd - 2ad$$

Problema 3.4 Prove que não existe uma PG que tenha os números 2, 3 e 5 como três de seus termos.

Solução.

Suponha que $(a_k)_{k\geq 1}$ seja uma PG de razão q, tal que $a_m = 2$, $a_n = 3$ e $a_p = 5$, para todo natural dois a dois distintos m, n e p. Então, pela Teorema 4, tem-se:

$$a_1 q^{m-1} = 2,\ a_1 q^{n-1} = 3 \text{ e } a_1 q^{p-1} = 5$$

Dividi-se membro a membro a primeira e a segunda igualdades acima, assim como a primeira e a terceira igualdade, obtém-se respectivamente

$$q^{m-n} = \frac{2}{3} \text{ e } q^{m-p} = \frac{2}{5}.$$

Como $q^{m-n} = \frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{m-p} = q^{(m-n)(m-p)}$ e $q^{m-p} = \frac{2}{5} \Rightarrow q^{(m-n)(m-p)} = \left(\frac{2}{5}\right)^{m-n}$, então:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{m-p} = \left(\frac{2}{5}\right)^{m-n} \quad \text{(I)}$$

Simplifica-se (I), tem-se:

$$2^{n-p} \cdot 5^{m-n} = 3^{m-p}$$

Portanto, a última igualdade acima contradiz o fato de que todo número natural maior que 1 admite apenas uma fatoração como produto de potência de primos.

Problema 3.5 Demonstre que, se $(a_1, a_2,, a_3,, \ldots)$ é uma PG, com termos todos diferentes de zero, então $\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots\right)$ também é PG.

Solução.

Como $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \cdots = q$, então:

$$\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots\right)$$

é uma PG, pois

$$\left(\frac{\frac{1}{a_2}}{\frac{1}{a_1}} = \frac{\frac{1}{a_3}}{\frac{1}{a_2}} = \cdots = \frac{\frac{1}{a_n}}{\frac{1}{a_{n-1}}} = \cdots\right) = \left(\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \cdots = \frac{a_{n-1}}{a_n} = \cdots = \frac{1}{q}\right)$$

Portanto, $\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \cdots\right)$ é uma PG de razão $\frac{1}{q}$.

Problema 3.6 Mostre que, se $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ é uma progressão geométrica, então o mesmo ocorre com $(a_1, a_3, a_5, \ldots)$ e $(a_2, a_4, a_6, \ldots)$.

Solução.

Como $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ é uma PG, então:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \cdots = q.$$

Note que,

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} = q^2, \frac{a_5}{a_3} = \frac{a_5}{a_4} \cdot \frac{a_4}{a_3} = q^2, \ldots$$

Então, $(a_1, a_3, a_5, \ldots)$ é PG de razão q^2.

Agora, como

$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} \cdot \frac{a_3}{a_2} = q^2, \frac{a_6}{a_4} = \frac{a_6}{a_5} \cdot \frac{a_5}{a_4} = q^2, \ldots$$

Então, $(a_2, a_4, a_6, \ldots)$ também é PG de razão q^2.

Problema 3.7 Seja $a, b > 0$; a, A_1, A_2, b estão em progressão aritmética; a, G_1, G_2, b estão em progressão geométrica. Mostre que $A_1A_2 \geq G_1G_2$

Solução.

Se a, G_1, G_2, b é uma PG, então $G_1G_2 = ab$.

Se a, A_1, A_2, b é uma PA, então $b = a + 3r \Rightarrow r = \frac{b-a}{3}$.

Mas,

$$A_1 = a + r = a + \frac{b-a}{3} = \frac{2a+b}{3}.$$

$$A_2 = a + 2r = a + \frac{2(b-a)}{3} = \frac{a+2b}{3}.$$

Como $a, b > 0$, então $G_1G_2 \geq 0$. Logo, tem-se:

$$A_1A_2 - G_1G_2 \geq 0 \text{ (I)}$$

Agora, substituem-se $A_1 = \frac{2a+b}{3}$, $A_2 = \frac{a+2b}{3}$ e $G_1G_2 = ab$ em (I), tem-se:

$$\left(\frac{2a+b}{3}\right)\left(\frac{a+2b}{3}\right) - ab \geq 0 \Rightarrow \frac{2(a-b)^2}{3} \geq 0 \Rightarrow A_1A_2 \geq G_1G_2.$$

Problema 3.8 Mostre que

$$\underbrace{11 \ldots 1}_{\text{n algarismos}} = \frac{10^n - 1}{9}, \forall n \geq 1.$$

Note que:

$$\underbrace{11 \ldots 1}_{\text{n algarismos}} = 1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{n-1}.$$

Como $(1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{n-1})$ é uma progressão geométirca de razão $q = 10$ e n termos, então pelo Teorema 5, tem-se:

$$S_n = \frac{a_1 q^n - a_1}{q-1} = \frac{1.10^n - 1}{10-1} = \frac{10^n - 1}{9}.$$

Problema 3.9 Considere a sequência (a_n) definida por $a_1 = 9$ e $3a_{n+1} + a_n = 4$, para $n \geq 1$. Seja S_n a soma dos n primeiros termos dessa sequência e $b_n = a_n - 1$. Mostre que (b_n) é uma progressão geométrica e, ainda, determine o menor inteiro positivo n_0 tal que $|S_n - n - 6| < \frac{1}{125}$, para todo $n \geq n_0$.

Solução.

Como $a_1 = 9$ e $b_n = a_n - 1$, então,

$$b_1 = a_1 - 1 = 9 - 1 = 8.$$

Note que,

$$b_n = a_n - 1 \Rightarrow a_{n+1} = b_{n+1} + 1.$$

Por outro lado,

$$3a_{n+1} + a_n = 4 \Rightarrow 3(b_{n+1} + 1) + (b_n + 1) = 4 \Rightarrow b_{n+1} = -\frac{1}{3} b_n.$$

Portanto, (b_n) é uma PG de razão $-\frac{1}{3}$ e primeiro termo igual a 8.

Agora, como S_n é a soma dos n primeiros termos da sequência (a_n) e $a_n = b_n + 1$, tem-se:

$$S_n = a_1 + a_1 + ... + a_n$$

$$S_n = (b_1 + 1) + (b_2 + 1) + ... + (b_n + 1)$$

$$S_n = (b_1 + b_2 + ... + b_n) + n$$

Mas (b_n) é uma PG, logo

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1} + n,$$

Como $q = -\frac{1}{3}$ e $b_1 = 8$.

Assim,

$$S_n = 6 - 6\left(-\frac{1}{3}\right)^n + n.$$

Portanto,

$$|S_n - n - 6| = 6\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Visto que

$$6\left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{2}{243} > \frac{1}{125} > \frac{1}{729} = 6\left(\frac{1}{3}\right)^7$$

Assim, o menor inteiro é $n_0 = 7$.

Problema 3.10 Mostre que não existe valor real de x tal que a sequência (–4, x – 1, x + 1) seja uma progressão geométrica.

Solução.

Pela propriedade (G2), tem-se:

$$(x-1)^2 = -4(x+1) \Rightarrow x^2 + 2x + 5 = 0$$

Como $x^2 + 2x + 5 = 0$ é uma equação de 2º grau e o discriminante dela é menor que zero, isto é, $\Delta < 0$, então:

$$\nexists x \in \mathbb{R}$$

Portanto, não existe valor real de x que torna a sequência (– 4, x – 1, x + 1) uma PG.

Problema 3.11 Uma PG finita tem n termos. Sendo S a soma dos termos, S' a soma de seus inversos e P o produto dos elementos, prove que $P^2 = \left(\frac{S}{S'}\right)^n$.

Solução.

Seja $(a, aq, aq^2, ..., aq^{n-1})$ uma PG de razão q e $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{aq}, \frac{1}{aq^2}, \ldots, \frac{1}{aq^{n-1}}\right)$ de razão $\frac{1}{q}$.

Então, elevam-se a n os dois membros da igualdade, isto é:

$$S = \frac{a(q^n-1)}{q-1} \Rightarrow S^n = \frac{a^n(q^n-1)^n}{(q-1)^n} \text{ (I)}$$

De forma análoga em S', isto é:

$$S' = \frac{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{q^n}-1\right)}{\frac{1}{q}-1} = \frac{q^n-1}{aq^{n-1}(q-1)} \Rightarrow (S')^n = \frac{(q^n-1)^n}{a^n q^{n(n-1)}(q-1)^n} \text{ (II)}$$

Fazendo a razão de (I) para (II), tem-se:

$$\left(\frac{S}{S'}\right)^n = \frac{\frac{a^n(q^n-1)^n}{(q^n-1)^n}}{\frac{(q^n-1)^n}{a^n q^{n(n-1)}(q-1)^n}} = \frac{a^n(a^n-1)^n}{(q-1)^n} \cdot \frac{a^n q^{n(n-1)}(q-1)^n}{(q^n-1)^n} = a^{2n}q^{n(n-1)}.$$

Como o produto $P = (a_1 a_n)^{\frac{n}{2}}$, então $P^2 = a^{2n}q^{n(n-1)}$.

Portanto, $P^2 = \left(\frac{S}{S'}\right)^n$.

Problema 3.12 Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ progressão geométrica com termo inicial a_1 positivo e razão r > 1, e S_n a soma dos n primeiros termos da progressão. Prove, por indução finita, que $S_n \leq \frac{r}{r-1} a_n$, para qualquer $n \geq 1$.

Solução.

i) Para n = 1 a desigualdade é verdadeira:

Como r > 1, então $\frac{r}{r-1} > 1$; e $S_1 = a_1 > 0$, então $S_1 = a_1 < \frac{r}{r-1} a_1$.

ii) Suponha que a desigualdade vale para n, isto é:

$$S_n \leq \frac{r}{r-1} a_n \text{ (hipótese de indução)}$$

Então, prova-se que ela vale para n + 1.

Note que

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1},$$

pois S_{n+1} é a soma dos primeiros n termos adicionada do termo n + 1.

Usa-se a hipótese de indução e adiciona-se a_{n+1} em ambos os lados da desigualdade, tem-se:

$$S_n \leq \frac{r}{r-1} a_n \Leftrightarrow S_{n+1} \leq \frac{r}{r-1} a_n + a_{n+1}.$$

Como se trata de uma progressão geométrica $a_{n+1} = r.a_n$, ou seja, pode-se trocar a_n por $\frac{a_{n+1}}{r}$.

Então,

$$S_{n+1} \leq \frac{r}{r-1} \cdot \frac{a_{n+1}}{r} + a_{n+1},$$

isto é,

$$S_{n+1} \leq \left(\frac{1}{r-1} + 1\right) a_{n+1} = \frac{r}{r-1} a_{n+1},$$

Portanto, $S_{n+1} \leq \frac{r}{r-1} a_{n+1}$.

Problema 3.13 Mostre que o primeiro termo de uma progressão geométrica infinita é um número múltiplo de 5, sabendo que soma dos termos de ordem ímpar dessa mesma progressão é 20 e a soma dos termos de ordem par é 10.

Solução.

Note que:

$$a_1 + a_3 + a_5 + \ldots = 20 \text{ e razão } q^2$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + \ldots = 10 \text{ razão } q^2$$

Agora, seja S_i a soma dos termos de ordem ímpar da PG infinita e S_p a soma dos termos de ordem par, isto é:

$$S_i = \frac{a_1}{1-q^2} = 20 \text{ e } S_p = \frac{a_2}{1-q^2} = 10,$$

de onde vem:

$$\frac{S_p}{S_i} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2},$$

isto é,

$$q = \frac{1}{2}.$$

Substituem-se $q = \frac{1}{2}$ em S_i. Logo, $a_1 = 15$.

Problema 3.14. Sendo $-1 < q < 1$, e a soma

$$S(q) = 12 + 12r + 12r^2 + 12r^3 + ...,$$

Ou seja, uma soma de PG. Para um certo $\alpha \in]-1, 1[$, temos a equação $S(\alpha)S(-\alpha) = 2016$. Qual o valor de $S(\alpha) + S(-\alpha)$?

Solução.

Como a razão pertence ao intervalo $]-1, 1[$, temos uma PG decrescente com S(q) o seu limite da soma.

Assim, tem-se que:

$$a_1 = 12.$$

$$S(\alpha) = 12 + 12\alpha + 12\alpha^2 + 12\alpha^3 + ... = \frac{12}{1-\alpha} \text{ (I)}$$

$$S(-\alpha) = 12 - 12\alpha + 12\alpha^2 - 12\alpha^3 + ... = \frac{12}{1-(-\alpha)} \text{ (II)}$$

Mas,

$$S(\alpha)S(-\alpha) = 2016 \text{ (III)}$$

Substituem-se (I) e (II) em (III), tem-se:

$$\frac{12}{1-\alpha} \cdot \frac{12}{1+\alpha} = 2016 \Rightarrow 1 - \alpha^2 = \frac{1}{14}. \text{ (IV)}$$

Agora, fazem-se:

$$S(\alpha) + S(-\alpha) = \frac{12}{1-\alpha} + \frac{12}{1+\alpha} \Leftrightarrow S(\alpha) + S(-\alpha) = \frac{12(1+\alpha) + 12(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\alpha)} \Leftrightarrow S(\alpha) + S(-\alpha) = \frac{24}{1-\alpha^2} \text{ (V).}$$

Substituem-se (IV) em (V), tem-se:

$$S(\alpha) + S(-\alpha) = \frac{24}{1-\alpha^2} = \frac{24}{\frac{1}{14}} = 24 \cdot 14 = 336$$

Portanto, o valor de $S(\alpha) + S(-\alpha)$ é 336.

Problema 3.15 Prove que em toda progressão geométrica tem-se que:

$$S_n^2 + S_{2n}^2 = S_n \cdot (S_{2n} + S_{3n})$$

Solução.

Note que:

$$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1},\ S_{2n} = \frac{a_1(q^{2n}-1)}{q-1} \text{ e } S_{3n} = \frac{a_1(q^{3n}-1)}{q-1}.$$

Logo,

$S_n^2 + S_{2n}^2 = \frac{a_1^2}{(q-1)^2} \cdot [(q^n - 1)^2 + (q^{2n} - 1)^2] = \frac{a_1^2}{(q-1)^2} \cdot (q^{4n} - q^{2n} - 2q^n + 2) = S_n(S_{2n} + S_{3n}) =$

$= \frac{a_1}{q-1}(q^n - 1) \cdot \left[\frac{a_1}{q-1} \cdot (q^{2n} - 1 + q^{3n} - 1)\right] = \frac{a_1^2}{(q-1)^2} \cdot (q^n - 1)(q^{3n} + q^{2n} - 2) =$

$= \frac{a_1^2}{(q-1)^2} \cdot (q^{4n} + q^{2n} - 2q^n + 2).$

Então,

$$S_n^2 + S_{2n}^2 = S_n \cdot (S_{2n} + S_{3n})$$

4 SEQUÊNCIAS ESPECIAIS

No ensino médio, assim como nos vestibulares, são abordadas sequências como as progressões aritméticas e geométricas. No entanto, existem outros tipos de sequências, que são as progressões harmônicas, aritmético-geométricas e geométrico-aritméticas.

4.1 Progressão Harmônica

4.1.1 Definição de uma progressão harmônica

Definição 4.1 Define-se progressão harmônica (PH) a sequência (a_n) de termos (a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...) não nulos tais que seus inversos formam uma progressão aritmética de primeira ordem. Sendo assim, a sequência (a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...) é uma progressão harmônica se, e somente se $\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots, \frac{1}{a_n}, \ldots\right)$ forma uma progressão aritmética de primeira ordem.

Exemplo 4.1 A sequência (a_n) = (1, 3, –3, –1, $-\frac{3}{5}$) é uma progressão harmônica, pois a sequência $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ forma uma PA, isto é, (1, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$, –1, $-\frac{5}{3}$). Assim,

$$r = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$$

$$r = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$r = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$r = -\frac{5}{3} + 1 = -\frac{2}{3}$$

Exemplo 4.2 A sequência (b_n) = (5, 5, 5, 5, ...) é uma progressão harmônica, pois

$$\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5} = 0\,, \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = 0, \ldots, \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = 0, \ldots\right).$$

Portanto, como $\frac{1}{b_n}$ é uma PA de razão r = 0, então b_né uma progressão harmônica.

4.1.2 Termo Geral de uma progressão harmônica

Assim como as progressões aritméticas e geométricas, a progressão harmônica possui um termo geral, isto é, uma lei que permite determinar a posição de certo termo.

Considere (a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...) uma progressão harmônica. Então, a sequência $\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots, \frac{1}{a_n}, \ldots\right)$ é uma progressão aritmética de razão r = $\frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2}$.

Como $a_n = a_1 + (n-1)r$ é o termo geral da PA, então $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + (n-1)r$ é o termo geral de uma progressão harmônica. Mas $r = \frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2}$, então do termo geral da PH segue-se:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + (n-1)r \Rightarrow \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + (n-1).\frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2}.$$

Agrupando os termos, tem-se:

$$a_n = \frac{a_1 a_2}{a_2 + (n-1)(a_1 - a_2)}. \tag{32}$$

Portanto, a_n é o termo geral de uma PH.

Exemplo 4.3 Seja a progressão harmônica $(-1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{7}, ...)$. Determine o oitavo termo dessa progressão.

Solução. Pelo termo geral da PH tem-se:

$$a_8 = \frac{(-1).\left(-\frac{1}{4}\right)}{\left(-\frac{1}{4}\right) + (8-1).\left(-1-\frac{1}{4}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(-\frac{1}{4}\right) + 7.\left(-\frac{5}{4}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{35}{4}\right)} = -\frac{1}{36}.$$

4.1.3 Propriedades de uma progressão harmônica

As propriedades das progressões harmônicas são resultados de algumas propriedades das progressões aritméticas.

Propriedade (H1). Para toda progressão harmônica, quaisquer três termos consecutivos são tais que o segundo é a média harmônica dos outros dois.

Demonstração.

Sejam a, b e c três termos de uma progressão harmônica. Então, $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ são termos de uma progressão aritmética. Assim, de acordo com a propriedade (P1) da PA, tem-se:

$$\frac{1}{b} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}{2} \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{\frac{a+c}{ac}}{2}$$

Organizando os termos em função de b, tem-se:

$$b = \frac{2ac}{a+c} \tag{33}$$

Propriedade (H2). Sendo P o produto dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, então o produto dos n primeiros termos da PH é igual a $\frac{1}{P}$.

Demonstração. Sendo p = $a_1a_2a_3...a_n$, onde a_1, a_2, a_3, ..., a_n, são termos da PA, tem-se que o produtos dos n primeira da PH é $\frac{1}{p} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \frac{1}{a_3} \cdots \frac{1}{a_n}$.

Exemplo 4.4 Determinar x de modo que a sequência $\left(\frac{1}{3}, x, \frac{1}{7}\right)$ seja uma progressão harmônica.

Solução.

Pela propriedade (H1), tem-se:

$$x = \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{7}\right)}{\frac{1}{3} + \frac{1}{7}} = \frac{\frac{2}{21}}{\frac{10}{21}} = \frac{1}{5}$$

Portanto, para x = $\frac{1}{5}$ a sequência $\left(\frac{1}{3}, x, \frac{1}{7}\right)$ é uma PH.

4.2 Progressão aritmético-geométrica

4.2.1 Definição de uma progressão aritmético-geométrica

Definição 4.2. Define-se progressão aritmético-geométrica (PAG) toda sequência na qual os seus termos são obtidos a partir de duas progressões (progressão aritmética e progressão geométrica), isto é, os termos das progressões são ordenadamente multiplicados, desde que o primeiro termo da PG seja igual a 1 e a razão diferente de zero (LOPES, 1998; PAIVA, 2010).

Seja a PA de termos (a_1, a_1+ r, a_1 + 2r, ...). Como o primeiro termo da PG é igual 1 (pela definição de PAG), então tem-se uma PG do tipo (1, q, q^2, ...). Mas, como a PAG é o produto dos termos ordenadamente das duas progressões, então se escreve a PAG assim, [a_1, (a_1 + r)q, (a_1 + 2r)q^2, (a_1 + 3r)q^3, ...]. As razões r e q (q ≠ 0) são, respectivamente, das progressões aritméticas e geométricas.

Exemplo 4.5 A sequência (2, 15, 72, ...) é uma progressão aritmético-geométrica, pois os seus termos são produtos de PA e PG ordenadamente, isto é:

$$(2.1, 5.3, 8.9, ...)$$

Os termos da PA são (2, 5, 8, ...) e da PG (1, 3, 9, ...). Além disso, tem-se o primeiro termo da PG igual a 1 e razão q ≠ 0.

4.2.2 Termo geral de uma progressão aritmético-geométrica

Na progressão aritmético-geométrica o termo geral é obtido a partir do produto dos termos ordenados da PA e PG, isto é, quando se avançam, termo a termo.

Seja (A_1, A_2, A_3, ..., A_n, ...) uma progressão aritmético-geométrica. Então,

$$A_2 = (A_1 + r) \cdot q$$
$$A_3 = (A_1 + 2r) \cdot q^2$$
$$A_4 = (A_1 + 3r) \cdot q^3$$

Assim, o termo geral de uma PAG é:

$$A_n = [A_1 + (n-1)r] \cdot q^{n-1} \tag{34}$$

Demonstração. Pelo princípio da indução finita, tem-se:

1º) P(1) é verdadeira, pois

$$A_n = [A_1 + (n-1)r] \cdot q^{n-1} \Rightarrow A_1 = [A_1 + (1-1)r] \cdot q^{1-1} \Rightarrow A_1 = A_1$$

2º) Supondo que P(n), com $n \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$A_n = [A_1 + (n-1)r] \cdot q^{n-1} \text{ (I) (hipótese da Indução)}$$

e prova-se que P(n + 1) é verdadeira.

Da definição de PAG tem-se:

$$A_{n+1} = A_n . q + r . q^n \text{ (II)}$$

Mas, por hipótese $A_n = [A_1 + (n-1)r] \cdot q^{n-1}$ e substituindo (I) em (II), tem-se:

$$A_{n+1} = [A_1 + (n-1)r] \cdot q^{n-1} . q + r . q^n \Leftrightarrow A_{n+1} = [A_1 + (n-1)r] \cdot q^n + r . q^n \Leftrightarrow$$
$$A_{n+1} = [A_1 + (n-1)r + r] \cdot q^n \Leftrightarrow A_{n+1} = [A_1 + nr] \cdot q^n$$

Portanto, P(n + 1) é válida para $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 4.6 Seja (a_n) uma progressão aritmético-geométrica (–1, 2, 12, ...). Determine o sexto termo dessa progressão.

Solução.

Como (–1, 2, 12, ...) é uma PAG, então

$$(-1.1, 1.2, 3.4, ...),$$

que tem como razões $r = 1 - (-1) = 2$ e $q = \frac{2}{1} = 2$.

Assim, pelo termo geral da PAG tem-se:

$$A_6 = [-1 + (6-1)2] \cdot 2^{6-1} \Leftrightarrow A_6 = 288$$

4.2.3 Soma dos n primeiros termos de uma Progressão aritmético-geométrica

Teorema 8. A soma S_n dos n primeiros termos de uma PAG é dada pela seguinte fórmula:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} + \frac{rq[1-nq^{n-1}+(n-1)q^n]}{(1-q)^2}, \; q \neq 1. \tag{35}$$

Demonstração.

Seja $(A_1, A_2, A_3, ..., A_n)$ uma progressão aritmético-geométrica. Como $S_n = A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n$ é a soma dos n primeiros termos da PAG, então por definição, tem-se:

$$S_n = a_1 + (a_1 + r)q + (a_1 + 2r)q^2 + ... + [a_1 + (n-1)r]q^{n-1} \tag{36}$$

Multiplica-se em ambos os membros da igualdade (36) por q, segue-se:

$$qS_n = qa_1 + (a_1 + r)q^2 + (a_1 + 2r)q^3 + ... + [a_1 + (n-1)r]q^n \tag{37}$$

Fazem-se a diferença entre (36) e (37), tem-se:

$$S_n(1-q) = a_1 - a_1q^n + r(q + q^2 + ... + q^{n-1}) - (n-1)rq^n \tag{38}$$

Como $1 + q + q^2 + ... + q^{n-2} = q\frac{(1-q^{n-1})}{1-q}$, pois é soma dos termos de uma PG, então:

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n) + rq\frac{(1-q^{n-1})}{1-q} - (n-1)rq^n \tag{39}$$

O que implica em:

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n) + rq\,\frac{(1-nq^{n-1}+(n-1)q^n)}{1-q} \tag{40}$$

Assim, segue-se:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} + \frac{rq[1-nq^{n-1}+(n-1)q^n]}{(1-q)^2}$$

Exemplo 4.7 Dada uma progressão aritmético-geométrica de termos $\left(1, 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, ...\right)$. Determine a soma dos dez primeiros termos dessa progressão.

Solução.

Note que da PAG, a progressão geométrica tem como primeiro termo igual 1, então segue-se também o primeiro termo da PA igual a 1.

Para o segundo termo é necessário também encontrar o terceiro termo. Como $1 = \frac{2}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4}$, então as duas progressões são (1, 2, 3, ...) e $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ...)$, respectivamente, progressão aritmética (r = 1) e geométrica ($q = \frac{1}{2}$).

Assim, pelo Teorema 8, tem-se:

$$S_{10} = \frac{1\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1.\frac{1}{2}\left[1-10\left(\frac{1}{2}\right)^{10-1}+(10-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{2}} = \frac{509}{128}$$

4.3 Progressão geométrico-aritmética

4.3.1 Definição de uma progressão geométrico-aritmética

Definição 4.3 Chama-se progressão geométrico-aritmético (PGA) toda sequência na qual os seus termos são obtidos a partir de duas progressões, (progressão aritmética e progressão geométrica), ou seja, os termos das duas progressões são ordenadamente somados, desde que o primeiro termo da PA seja igual a zero (PAIVA, 2010).

Seja a PG de termos (a_1, a_1q, a_1q^2, ...). Como o primeiro termo da PA é igual zero (pela definição de PGA), então tem-se uma PA do tipo (0, r, 2r, 3r, ...). Mas, como a PGA é a soma dos termos ordenadamente das duas progressões, então se escreve a PGA dessa forma, [a_1, (a_1q + r), (a_1q^2 + 2r), (a_1q^3 + 3r), ...]. As razões r e q são, respectivamente, das progressões aritméticas e geométricas.

Exemplo 4.8 A sequência (2, 5, 10, 19) é uma progressão geométrico-aritmética, pois na PGA é necessário o primeiro termo da PA seja igual zero, então tem-se o primeiro termo da PG igual a 2. Para se conhecer o segundo, terceiro e quarto termo da PGA deve-se escrever os termos em soma de dois termos, isto é:

$$5 = 1 + 4$$
$$10 = 2 + 8$$
$$19 = 3 + 16.$$

Assim, tem-se a PA de termos (0, 1, 2, 3) e a PG (2, 4, 8, 16).

Portanto, (2, 5, 10, 19) é uma progressão geométrico-aritmética.

4.3.2 Termo geral de uma progressão geométrico-aritmética

O termo geral de uma progressão geométrico-aritmética é obtido pela definição de PGA e também observando o padrão dos seus termos.

Seja $(A_1, A_2, A_3, ..., A_n, ...)$ uma PGA, então tem-se:

$$A_2 = a_1q + r$$
$$A_3 = a_1q^2 + 2r$$
$$A_4 = a_1q^3 + 3r$$
$$\vdots$$
$$A_n = a_1q^{(n-1)} + (n-1)r$$

Assim, o termo geral é dado por:

$$A_n = a_1q^{n-1} + (n-1)r \qquad (41)$$

Demonstração.

Pelo princípio da indução finita, tem-se:

1º) P(1) é verdadeira, pois

$$A_n = a_1q^{n-1} + (n-1)r \Rightarrow A_1 = a_1q^{1-1} + (1-1)r \Rightarrow A_1 = a_1$$

2º) Supondo que P(n), com $n \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$A_n = a_1q^{n-1} + (n-1)r \text{ (I) (hipótese da Indução)}$$

e prova-se que P(n + 1) é verdadeira.

Por hipótese, tem-se:

$$A_n = a_1q^{n-1} + (n-1)r$$

Multiplicam-se e adicionam-se ambos os membros da igualdade (I), respectivamente, a razão q da PG e $r[n(1-q) + q]$, tem-se:

$$A_nq + r[n(1-q) + q] = a_1q^n + (n-1)rq + r[n(1-q) + q],$$

isto é,

$$A_{n+1} = a_1q^n + (n-1)rq + r[n(1-q) + q].$$

Logo,

$$A_{n+1} = a_1q^n + rnq - rq + rn - rnq + rq.$$

Então,

$$A_{n+1} = a_1q^n + rq.$$

Portanto, P(n + 1) é válida para $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 4.9 Seja a progressão geométrico-aritmética ($\frac{1}{4}$, 1, 2, ...). Determine o oitavo termo dessa progressão.

Solução. Seja (b_n) a progressão aritmética e (c_n) a progressão geométrica.

Como o primeiro da PGA é $\frac{1}{4}$, e pela definição o primeiro de termo da PA é zero, então,

$$b_1 = 0 \text{ e } c_1 = \frac{1}{4}, \text{ pois } A_1 = b_1 + c_1$$

Como $b_2 + c_2 = 1$ e $b_3 + c_3 = 2$, por inspeção, tem-se:

$$b_2 = \frac{1}{2},\ b_3 = 1,\ c_2 = \frac{1}{2} \text{ e } c_3 = 1, \text{ isto é,}$$

a razão da PA é $r = \frac{1}{2}$ e da PG, $q = 2$.

Sendo assim, por (41), tem-se:

$$A_n = a_1q^{n-1} + (n-1) \Leftrightarrow A_8 = \frac{1}{4} \cdot 2^{8-1} + (8-1).\frac{1}{2} \Leftrightarrow A_8 = \frac{77}{2}$$

4.3.3 Soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrico-aritmética

Teorema 9. A soma dos n primeiros de uma progressão geométrico-aritmética é dada por:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} + \frac{(n-1)nr}{2}, \ q \neq 1 \tag{42}$$

Demonstração. Seja a_n uma progressão geométrico-aritmética de termos $(A_1, A_2, A_3, ..., A_n)$. Agora, seja S_n a soma dos n primeiros da mesma progressão, isto é:

$$S_n = A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n$$

Como

$$A_2 = a_1q + r,\ A_3 = a_1q^2 + 2r,\ ...,\ A_n = a_1q^{n-1} + (n-1)r$$

Então, pode-se escrever assim,

$$S_n = a_1 + a_1q + r + a_1q^2 + 2r + ... + a_1q^{n-1} + (n-1)r.$$

Agrupam-se os termos, tem-se:

$$S_n = a_1(1 + q + q^2 + ... + q^{n-1}) + r[1 + 2 + ... + (n-1)]$$

Como $1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$ e $1 + 2 + ... + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$, respectivamente, a soma dos termos da PG e a soma dos termos da PA, então:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} + \frac{nr(n-1)}{2}.$$

Exemplo 4.10 Seja a progressão geométrico-aritmética (1, 8, 24, ...). Determine a soma dos setes primeiros termos dessa progressão.

Solução. Considere A_n a progressão geométrico-aritmética, b_n a progressão aritmética e c_n a progressão geométrica.

Como o primeiro da PGA é 1, e pela definição o primeiro termo da PA é zero, então, tem-se:

$$b_1 = 0 \text{ e } c_1 = 1, \text{ pois } A_1 = b_1 + c_1$$

Como $b_2 + c_2 = 8$ e $b_3 + c_3 = 24$, por inspeção, tem-se:

$$b_2 = 4,\ b_3 = 8,\ c_2 = 4 \text{ e } c_3 = 16.$$

Logo, a razão da PA é r = 4 e da PG, q = 4.

Assim, pelo teorema 9, que é a fórmula da soma dos n primeiros termos da PGA e tendo $a_1 = 1$, n = 7, r = 4 e q = 4, tem-se:

$$S_7 = \frac{1(1-4^7)}{1-4} + \frac{7.4(7-1)}{2} \Leftrightarrow S_8 = \frac{-16383}{-3} + \frac{168}{2} \Leftrightarrow S_8 = 5\,545.$$

4.4 Usando sequências especiais nas resoluções de problemas

Problema 4.1 O primeiro termo de uma progressão harmônica é igual 2 e tal que $5a_1 = -a_3$. Mostre que o oitavo termo dessa progressão vale $-\frac{5}{8}$.

Solução.

Note que como o primeiro termo vale 2, então $a_3 = -10$. Pela propriedade (H1), a_2 é média harmônica entre os inteiros a_1 e a_3.

Sendo assim:

$$a_2 = \frac{2.2.(-10)}{2+(-10)} = 5$$

Agora, pelo termo geral da progressão harmônica calcula-se o oitavo termo, isto é,

$$a_8 = \frac{2.5}{5+(8-1)(2-5)} = -\frac{5}{8}$$

Portanto, o oitavo termo da progressão vale $-\frac{5}{8}$.

Problema 4.2 Mostre que se a^2, b^2 e c^2 são termos consecutivos de uma progressão aritmética, então ocorre que b + c, a + c e a + b estão em progressão harmônica.

Solução.

Têm-se dois casos a considerar:

(i) Se a = b = c, então a progressão aritmética (a^2, b^2, c^2) é estacionário. Isso implica que (b + c, a + c, a + b) seja uma progressão harmônica.

(ii) Se a ≠ b ≠ c, então pela definição de PA tem-se:

$$c^2 - b^2 = r,\ c^2 - a^2 = 2r \text{ e } b^2 - a^2 = r.$$

Agrupando cada equação acima, tem-se:

$$\frac{c-b}{r} = \frac{1}{b+c}, \frac{c-a}{2r} = \frac{1}{a+c} \text{ e } \frac{b-a}{r} = \frac{1}{a+b}.$$

Agora, se provar que, nesta ordem, os números $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}$ e $\frac{1}{a+b}$ formam uma progressão aritmética, então b + c, a + c e a + b são termos consecutivos de uma progressão harmônica.

Como $\frac{1}{b+c} = \frac{c-b}{r}, \frac{1}{a+c} = \frac{c-a}{2r}$ e $\frac{1}{a+b} = \frac{b-a}{r}$, então, pela propriedade (P1) da progressão aritmética, tem-se:

$$\frac{c-b}{r} + \frac{b-a}{r} = 2.\frac{c-a}{2r} \Rightarrow \frac{c-a}{r} = \frac{c-a}{r}.$$

Portanto, b + c, a + c, a + b são termos de uma progressão harmônica.

Problema 4.3 Mostre que se x, y, z estão em progressão harmônica, então ocorre o mesmo com $\frac{x}{y+z}, \frac{y}{x+z}, \frac{z}{x+y}$.

Solução.

Aplica-se a primeira propriedade da progressão harmônica (H1) em $\frac{x}{y+z}, \frac{y}{x+z}, \frac{z}{x+y}$, tem-se:

$$\frac{y}{y+z} = \frac{2.\left(\frac{x}{y+z}\right).\left(\frac{z}{x+y}\right)}{\left(\frac{x}{y+z}\right)+\left(\frac{z}{x+y}\right)}.$$

Agrupam-se os termos, tem-se:

$$\frac{y}{x+z} = \frac{2xz}{x^2+b(a+c)+z^2}\ .\ (I)$$

Agora, como x, y e z são termos de uma progressão harmônica, e ainda, pela definição da PH, então:

$$\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \text{ e } \frac{1}{z},$$

são termos de uma progressão aritmética. Logo, por (P1) da PA, tem-se:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 2.\frac{1}{y} \Rightarrow y(x + z) = 2xz.\ \ (II)$$

Fazem-se a substituição (II) em (I), tem-se:

$$\frac{y}{x+z} = \frac{y(x+z)}{x^2+2ac+z^2} \Rightarrow \frac{y}{x+z} = \frac{y(x+z)}{x^2+2ac+z^2}.$$

Dessa forma, $\frac{x}{y+z}, \frac{y}{x+z}, \frac{z}{x+y}$ é uma progressão harmônica.

Problema 4.4 Sejam a, b e c números reais positivos que nesta ordem formam uma progressão harmônica. Se a, b e c representam, respectivamente, o lado, área da face e o volume de um cubo, demonstre que este cubo é o cubo unitário.

Solução.

Note que $b = a^2$ e $c = a^3$, pois são, respectivamente, a área da face e o volume do cubo. Logo, (a, a^2, a^3) é uma progressão harmônica.

Por (H1), tem-se:

$$a^2 = \frac{2.a.a^3}{a+a^3} \Rightarrow 2a^4 = a^3 + a^5$$

Como a é positivo, então dividem-se a expressão acima por a^3, obtém-se:

$$2a = 1 + a^2$$

Agrupando-se os termos, tem-se:

$$a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1.$$

Assim, o cubo tem lado a = 1, área da face $a^2 = 1^2 = 1$ e volume igual $a^3 = 1^3 = 1$, o que comprova que o cubo dado é o cubo unitário.

Problema 4.5 Seja a progressão harmônica (0,5; 0,25; $\frac{1}{6}$; 0,125; ...). Mostre que o termo igual 0,0125 é o quadragésimo termo da progressão harmônica.

Solução.

Note que a progressão harmônica (0,5; 0,25; $\frac{1}{6}$; 0,125; ...) é igual a ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$ ..).

Como a progressão harmônica é obtida pela inversão dos termos da progressão aritmética (2, 4, 6, 8, ...), então o termo 0,0125 = $\frac{1}{80}$ da progressão harmônica tem a mesma ordem do termo da PA igual a 80.

Assim, pelo termo geral da PA, tem-se:

$$80 = 2 + (n - 1)2 \Rightarrow n = 40.$$

Problema 4.6 Determina x de modo que a sequência ($\frac{1}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{9}{8}$, x) é uma progressão aritmético-geométrica.

Solução.

Note que $[a_1, (a_1 + r)q, (a_1 + 2r)q^2, (a_1 + 3r)q^3, ...]$ são termos de uma PAG. Numerando a sequência acima por (A_1, A_2, A_3, A_4) tem-se:

$$A_2 = (a_1 + r)q \Rightarrow \frac{5}{4} = (\frac{1}{2} + r)q \text{ (I)}$$

$$A_3 = (a_1 + 2r)q^2 \Rightarrow \frac{9}{8} = (\frac{1}{2} + 2r)q^2 \text{ (II)}$$

Agora, eleva-se (I) ao quadrado e divide-se (I) por (II), tem-se:

$$\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^2}{\left(\frac{9}{4}\right)} = \frac{\left[\left(\frac{1}{2}+r\right)q\right]^2}{\left(\frac{1}{2}+2r\right)q^2} \Rightarrow 9r^2 - 16r - 4 = 0,$$

cujas raízes são 2 e $-\frac{2}{9}$.

Se r = 2, pela igualdade (I) tem-se que q = $\frac{1}{2}$. Logo,

$$A_4 = (a_1 + 3r)q^3 \Rightarrow x = (\tfrac{1}{2} + 3.2)\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow x = \tfrac{13}{16}.$$

Se r = $-\frac{2}{9}$, pela igualdade (I) tem-se que q = $\frac{9}{2}$. Então,

$$A_4 = (a_1 + 3r)q^3 \Rightarrow A_4 = \left[\tfrac{1}{2} + 3.\left(-\tfrac{2}{9}\right)\right].\left(\tfrac{9}{2}\right)^3 \Rightarrow x = -\tfrac{243}{16}.$$

Portanto, x = $\frac{13}{16}$ ou x = $-\frac{243}{16}$.

Problema 4.7 Demonstre que qualquer termo da progressão aritmético-geométrica (3, 12, 45, ...) sempre é divisível por 3.

Solução.

Considere os termos da PAG, $A_1 = 3$, $A_2 = 12$, $A_3 = 45$, ...

Como, por definição, $A_1 = a_1$, $A_2 = (a_1 + r)q$, $A_3 = (a_1 + 2r)q^2$, então:

$$12 = (3 + r)q \text{ (I)}$$

e

$$45 = (3 + 2r)q^2 \text{ (II)}$$

Agora, eleva-se ao quadrado (I) e divide-se (I) por (II), tem-se:

$$\frac{12^2}{45} = \frac{[(3 + r)q]^2}{(3 + 2r)q^2}.$$

Como q ≠ 0 (da definição de PAG) e agrupando os termos, tem-se:

$$5r^2 - 2r - 3 = 0,$$

cujas raízes são $-\frac{3}{5}$ e 1.

Se r = $-\frac{3}{5}$, pela igualdade (5.1) tem-se q = 5.

Se r = 1, pela igualdade (5.1) tem-se q = 3.

Agora, pelo termo geral da PAG, têm-se duas expressões, isto é:

Para r = $-\frac{3}{5}$ e q = 5, respectivamente, as razões da PA e PG:

$$A_n = \left[3 + (n - 1)\left(-\tfrac{3}{5}\right)\right]5^{n-1} \Rightarrow A_n = (6 - n).3.5^{n-2}$$

Para r = 1 e q = 3, respectivamente, as razões da PA e PG:

$$A_n = [3 + (n - 1)]3^{n-1} \Rightarrow A_n = (n + 2)3^{n-1}$$

Portanto, qualquer termo da progressão aritmético-geométrica (3, 12, 45, ...) é divisível por 3.

Problema 4.8 Mostre que a soma $S_n = 1 + 11 + 111 + ... + 11111..1$, onde a última parcela de S_n tem n dígitos iguais a 1, é uma progressão aritmético-geométrica e, em seguida, calcule a soma S_n.

Solução.

Note que as parcelas das somas podem ser escrito na forma abaixo:

$$S_n = 1 + (1+10) + (1 + 10 + 10^2) + ... + (1 + 10 + 10^2 + ... + 10^{n-1})$$

Como o número 1 está em todas as n parcelas; o número 10 em todas as (n – 1) parcelas; o número 10^2 em todas as (n – 2); e assim sucessivamente, até o 10^{n-1} apenas na última parcela de S_n, então, tem-se que:

$$S_n = n.1 + (n-1).10 + (n-2).10^2 + ... + 1.10^{n-1}$$

Assim, os números n, (n – 1), (n – 2), .., 1 formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de n termos de razão r = –1 e $a_1 = n$. Os números 1, 10, 10^2, ..., 10^{n-1}, nesta ordem, formam uma progressão geométrica de razão q = 10 e primeiro termo igual 1.

Portanto, de acordo com a definição de PAG, S_n = 1, 11, 111, ..., 11111...1, onde a última parcela de S_n tem n dígitos iguais a 1, é uma progressão aritmético-geométrica.

Como S_n é uma PAG, então pelo teorema 8 tem-se:

$$S_n = \frac{n(1-10^n)}{1-10} + \frac{-1.10[1-n10^{n-1}+(n-1)10^n]}{(1-10)^2}$$

$$S_n = \frac{n(10^n-1)}{9} + \frac{(-10)[1-n10^{n-1}+(n-1)10^n]}{9^2}$$

$$S_n = \frac{9n.10^n-9n}{81} + \frac{-10 + n10^n-(n-1)10^{n+1}]}{81}$$

$$S_n = \frac{9n.10^n-9n-10 + n10^n-10n.10^n+10.10^n}{81}$$

$$S_n = \frac{10^n(9n + n-10n+10)-9n-10}{81}$$

$$S_n = \frac{10^n.10 - 9n-10}{81}$$

$$S_n = \frac{10^{n+1} - 9n-10}{81}.$$

Problema 4.9 Prove que: $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... + nx^{n-1} = \frac{n.x^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$, com $x \neq 1$.

Solução.

A soma $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... + nx^{n-1}$ é uma progressão aritmético-geométrica, isto é:

(1, 2, 3, 4, ..., n) é uma PA de razão r = 1 e $a_1 = 1$, assim como $(1, x, x^2, x^3, ..., x^{n-1})$ uma PG de razão q = x e primeiro termo igual 1. Portanto, multiplicando-se ordenadamente os elementos das duas progressões tem-se uma PAG.

Então, pelo Teorema 8, tem-se:

$$S_n = \frac{1(1-x^n)}{1-x} + \frac{1.x[1-nx^{n-1}+(n-1)x^n]}{(1-x)^2}$$

$$S_n = \frac{(1-x^n)(1-x)+x[1-nx^{n-1}+nx^n-x^n]}{(1-x)^2}$$

$$S_n = \frac{1-x-x^n+x^{n+1}+x-nx^n+nx^{n+1}-x^{n+1}]}{(1-x)^2}$$

$$S_n = \frac{1-x^n-nx^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

e assim,

$$S_n = \frac{n.x^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}\,.$$

Problema 4.10 Determine x de modo que –2, 0, 0, –2x são termos consecutivos de uma progressão geométrico-aritmética.

Solução.

Como em uma PGA o primeiro termo da PA é zero (pela definição da PGA), então segue-se que o primeiro termo da PG igual a –2, isto é, $a_1 = -2$.

Dos termos da PAG, tem-se

$$a_1q + r = 0 \text{ (I)}$$

e

$$a_1q^2 + 2r = 0 \text{ (II)}$$

Substituem $a_1 = -2$ nas equações (I) e (II), multiplica-se toda equação (I) por 2 e fazem-se (I) – (II), tem-se q = 0 ou q = 2.

Agora, para q = 0 segue-se r = 0 e para q = 2 implica em r = 4.

Dessa forma, podem-se encontrar os valores x pelo termo geral da PGA.

Para n = 4, $a_1 = -2$, r = 0 e q = 0, têm-se:

$$A_4 = -2.0^{4-1} + (4-1).0 \Rightarrow A_4 = 0.$$

Como – 2x = 0 segue-se x = 0.

Para n = 4, $a_1 = -2$, r = 4 e q = 2, têm-se:

$$A_4 = -2.2^{4-1} + (4-1).4 \Rightarrow A_4 = -4.$$

Como – 2x = – 4 segue-se x = 2.

Portanto, os valores são x = 0 ou x = 2 e as PGA_S, (–2, 0, 0, 0) e (–2, 0, 0, –4)

Problema 4.11 Prove que há infinitos múltiplos de 4 na progressão geométrico-aritmética (4, 9, 18, 35, ...).

Solução.

Para mostrar que há infinitos múltiplos de 4 na PGA acima, deve-se, primeiramente, escrever o termo geral da PGA em função do número de termos.

Pela definição de PGA, têm-se as equações:

$$4q + r = 9 \text{ (I)}$$

e

$$4q^2 + 2r = 18 \text{ (II)}$$

Agora, multiplica-se toda equação (I) por 2 e fazem-se (I) – (II), tem-se:

$$q^2 - 2q = 0,$$

que é uma equação do 2º cuja raízes são $q_1 = 0$ e $q_2 = 2$. Mas se $q_1 = 0$, então a igualdade (I) segue-se $r = 9$.

Então, pelo termo geral da PGA, tem-se:

$$A_4 = 4.0^{(4-1)} + (4-1).9 = 27,$$

o que é falso, pois $A_4 = 35$.

Se $q_2 = 2$, então pela igualdade (i) segue-se $r = 1$.

Então, pelo termo geral da PGA, tem-se:

$$A_n = 4.2^{(n-1)} + (n-1).$$

Agora, sendo t um número inteiro positivo qualquer, então os sucessores dos múltiplos de 4 são números da forma $4t + 1$ e fazem-se $n = 4t + 1$, tem-se:

$$A_{4t+1} = 4.2^{(4t+1-1)} + (4t + 1 - 1) = 4.2^{4t} + 4t.$$

Como cada uma das parcelas é múltiplo de 4, então existem infinitos múltiplos de 4 na progressão geométrico-aritmética (4, 9, 18, 35, ...).

Problema 4.12 Uma caixa d’água de cinco mil litros de capacidade está totalmente cheio. Certo dia seu dono verificou o exato momento do começo de um vazamento por um furo, que aumentava de tamanho em 10% a cada minuto que passa. Após o minuto seguinte ao começo do vazamento, o cano de saída da caixa d’água se rompe de modo que jorram 3 litros em um minuto e, sucessivamente, a quantidade de água que se perde por este cano triplica por minuto. Após 20 minutos do começo do vazamento, todos os reparos foram realizados por um técnico especializado. Determine o total de litros de água desperdiçados, sabendo que se perdeu 50 litros de água no primeiro minuto do vazamento causado pelo furo.

Solução.

Considera-se o instante zero quando o dono percebe o início do vazamento causado pelo furo. Sendo assim, a quantidade de água que se perde por minuto pelo furo forma uma progressão geométrica de primeiro termo igual a 50 e razão 1,1. Por outro lado, a quantidade de água que se perde por minuto pelo cano rompido forma uma progressão aritmética de primeiro igual a zero e razão igual a 3.

Portanto, o total de água desperdiçadas é a soma das quantidades pelo furo e pelo cano rompido. Logo, tem-se uma progressão geométrico-aritmética. Sendo assim, a solução do problema nos permite calcular a soma dos termos de uma PGA de 20 termos.

Assim, tem-se a PGA de termos (50; 58; 60,5; ...), cuja soma dos 20 primeiros termos são:

$$S_{20} = \frac{50(1-1{,}1^{20})}{1-1{,}1} + \frac{(20-1)20.3}{2} \approx 3432.$$

Portanto, foram desperdiçados cerca de 3432 litros de água desta caixa no total.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho procurou analisar o estudo das progressões não só no âmbito do ensino médio, mas também no ensino superior com as progressões harmônicas, aritmético-geométricas e geométrico-aritméticas, além de problemas e soluções.

Ponderando os resultados apresentados, os quais são frutos da revisão bibliográfica realizadas, o presente trabalho atendeu aos objetivos propostos, pois apresentou revisão de indução e recorrências, além de definições, teoremas e resoluções de problemas dos capítulos que envolveram progressões aritméticas, progressões geométricas, progressões harmônicas, aritmético-geométricas e geométrico-aritméticas.

Com as revisões de indução finita e recorrências de primeira ordem o leitor tem uma ferramenta fundamental nas demonstrações de teoremas e problemas que necessitam a demonstração. Nas progressões aritméticas, assim, também, como nas progressões geométricas e sequências especiais ele é capaz de aperfeiçoar os teoremas e as resoluções de problemas.

Enfim, espera-se que este trabalho auxiliem tantos alunos como professores no processo ensino-aprendizado das progressões e, também, contribua para aqueles que desejam se preparar para exames de vestibulares e olimpíadas.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl. B. **História da Matemática**. São Paulo, SP. Editora Edgard Blucher Ltda, 1974.

BUCCHI, Paulo. **Curso Prático de Matemática,** Volume 1.1ª ed. São Paulo, SP. Editora Moderna, 1998.

DANTE, Luiz Roberto. **Coleção Matemática,** Volume 1. 1ª ed. São Paulo, SP. Editora Ática, 2008.

GOULART, Márcio Cintra. **Matemática no Ensino Médio,** Volume 1. 3ª ed. São Paulo, SP. Editora Scipione, 2011.

IEZZI, Gerson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar volume 4:** Sequências, Matrizes, Determinante e Sistemas. 9ª ed. São Paulo, SP. Editora Atual, 2013.

IEZZI, Gelson; MURUKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar, volume 1**: Conjuntos e Funções. 9ª ed. São Paulo, SP. Editora Atual, 2013.

LEAL, Adriano Carlos. **Aprofundando o Estudo de Sequências e Progressões no Ensino Médio**. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?cpf=02347045946&d=20210502140040&h=c7754edb469995aa1b568a3ea26121d0da97d810 > Acesso em: 5 de outubro de 2020.

LIMA, Elon L. et al. **A Matemática no Ensino Médio**, volume 2. 6ª ed. Rio de Janeiro, RJ. SBM, 2006.

LIMA, Elon Lages. **Numero e Funções Reais, 1**ª ed. Rio de Janeiro, RJ. SBM, 2013.

LOPES, Luis. **Manual de Progressões.** 1ª ed. Rio de Janeiro, RJ. Editora Interciência, 1998.

MARTINS, David Pinto. **Sequências, Progressões e Séries:** Uma Abordagem para o Ensino Médio**.** Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?cpf=89142764572&d=20210502140902&h=ed457f4da99c4b621c82e0f2614cf4ccf9754301> Acesso em: 10 de Junho de 2020.

MENDES, Marcelo. **Polos Olímpicos de Treinamento: Curso de Álgebra – Nível 2.** Disponível em: <https://poti.impa.br/uploads/material_teorico/diqafy8dofks4.pdf> Acesso em: 27 de Maio de 2020.

MIGUEL, Lucas; XAVIER, Lais; FRANZOLIN, Daniel. **Progressões.** Disponível em: <http://www2.ime.unicamp.br/~ma225/2014Tarefa4-GrupoD.pdf> Acesso em: 23 de junho de 2020.

MIRANDA, Tiago; ASSIS, Cleber. **Módulo de Progressões Aritméticas:** Soma dos termos de uma PA**.** Disponível em: <https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material/sd6my1c4t3kcs.pdf> Acesso em: 8 de Junho de 2020.

MIRANDA, Tiago; ASSIS, Cleber. **Módulo de Progressões Aritméticas:** Exercício de PA**.** Disponível em: <https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material/sd6my1c4t3kcs.pdf> Acesso em: 8 de Junho de 2020.

MIRANDA, Tiago; ASSIS, Cleber. **Módulo de Progressões Geométricas:** Definição e Lei de formação**.** Disponível em: <https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material/bprbczvjpgggw.pdf> Acesso em: 5 de Agosto de 2020.

MIRANDA, Tiago; ASSIS, Cleber. **Módulo de Progressões Geométricas:** Soma dos termos da PG Finita**.** Disponível em: <https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material/cxf2wpdbfnk0s.pdf> Acesso em: 10 de Agosto de 2020.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta.** 1ª ed. Rio de Janeiro, RJ. SBM, 2014.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta.** 2ª ed. Rio de Janeiro, RJ. SBM, 2015.

MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo; ZANI, Sheila C. **Progressões e Matemática Financeira.** 6ª ed. Rio de Janeiro, RJ. SBM, 2015.

OLIVEIRA, Marcelo Rufino de; CARNEIRO, Manoel Leite. **Coleção Elementos da Matemática volume 3.** 3ª ed. Rio de Janeiro, RJ. Editora Vestseller, 2010.

PAIVA, Manoel. **Matemática,** Volume 1. 2ª ed. São Paulo, SP. Editora Moderna Plus, 2010.

PAIVA, Rui Eduardo Brasileiro. **Progressões Aritmético-Geométricas (PAG) e Progressões Geométrico-Aritméticas (PGA).** Revista do Professor de Matemática Número 73, Setembro de 2010.

PARENTE, Ulisses Lima. **Material Teórico – Módulo Progressões Aritméticas:** Definição e Lei de Formação de uma PA**.** Disponível em: <https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material_teorico/gfuoof00on40o.pdf> Acesso em: 8 de Junho de 2020.

SILVA, Israel Carley. **Recorrências:** uma abordagem sobre sequências recursivas para aplicações no Ensino Médio. Disponível em: <https://repositorio.unb.br/bitstream/10482/19334/1/2015_IsraelCarleyDaSilva.pdf > Acesso em: 10 de Junho de 2020.

TEODORO, Marcos Paulo; SILVA, Teles Timóteo de. **Sobre a Sequência de Fibonacci.** Disponível em: <https://periodicos.ufop.br:8082/pp/index.php/rmat/article/download/1152/1086> Acesso em: 13 de Maio de 2020.

YOUSSEF, Antonio N. et al; **Matemática,** Volume Único. 1ª ed. São Paulo, SP. Editora Scipione, 2009.